De Risis algebraische Formulierung der Phänomenologie der Monaden

Hausarbeit zum Seminar *Leibniz' Monadologie*
bei Prof. Dr. Christoph Hubig, TU Darmstadt WS 13/14

Jonathan Weinberger, 26. Mai 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In seiner Monografie *Geometry and Monadology* (2007) diskutiert Vincenzo de Risi die Metaphysik von Leibniz in Zusammenhang mit dessen geometrischen Theorien. In Kapitel 3: *Phenomenology* leitet De Risi die Notwendigkeit des Raums aus der Existenz der zueinander in Relation stehenden Monaden ab. Die spirituellen Monaden besitzen Perzeption und Expression. Die räumliche Welt der Phänomene besteht aus Ausdrücken der geistigen Monaden gemäß der monadischen Relationen. Umgekehrt stellen die Perzeptionen das individuierende Prinzip für Monaden dar: jede Monade ist durch ihre inneren und äußeren Perzeptionen bestimmt.[1]

[1] Vgl. [Lei02], Mon 8-9, 14

Im folgenden erörtern wir De Risis Modell für die Expressivität der Monaden. Dieses beruht auf Konzepten aus der universellen Algebra. Perzeptionen und Expressionen werden mittels Relationen und Homomorphismen umgesetzt. Ahand dieser Formalisierung lassen sich zentrale Argumente und Prinzipien aus der Monadologie verdeutlichen.

Nach einer Einführung der algebraischen Grundbegriffe betrachten wir die Ausdrucksrelation zwischen der noumenalen Welt der Monaden und der phänomenalen Welt der Perzeptionen. Wir untersuchen die Grenzen endlicher Perzeption und die materialen Beschränkungen der Ausdrucksrelation. Schließlich vergleichen wir im algebraischen Modell die gewonnen Resultate über Perzeption mit den analogen Situationen für Leibniz' Theorie des Wissens.

Abschließend stellen wir die sich insgesamt ergebenden Besonderheiten hinter dieser Theorie in den Kontext konkurrierender metaphysischer Annahmen.

Bemerkung. In den Fußnoten steht *Mon* für die *Monadologie* und *MA* für die *Metaphysische Abhandlung.*

2 Grundbegriffe aus der universellen Algebra

Zur Formulierung von de Risis algebraischem Modell für die Phänomenologie der Monaden benötigen wir einige mathematische Grundbegriffe, vornehmlich aus der universellen Algebra. Wir setzen nur eine rudimentäre Vertrautheit mit naiver Mengenlehre voraus. Die weitere mathematische Theorie findet sich z.B. in [BS12], Kap. II, §5.

Definition 2.1 (Relation, Funktion)**.** Seien A, B Mengen und $R \subset A \times B = \{(a, b) \colon a \in A, b \in B\}$. Dann ist R eine *Relation (mit Quellmenge A und Zielmenge B).* Für die Aussage $(a, b) \in R$ schreiben wir aRb.

Gibt es für jedes $a \in A$ genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in R$, dann heißt R eine *Funktion* oder *Abbildung.* Wir nennen A den *Urbildbereich* und B den *Bildbereich von f*. Wir schreiben dann $R \colon A \to B$ statt der Aussage $R \subset A \times B$ und $R(a) = b$ oder $R \colon a \mapsto b$ statt der Aussage $(a, b) \in R$.

Eine mathematische Relation kann also extensional durch Angabe aller Paare einander zugeordneter Elementen definiert werden, aber auch intensional durch ein Prädikat. Eine Funktion ist eine spezielle Relation, die man als "Abbildung" oder "Transformation" einer Menge in eine andere Menge betrachten kann. Die dabei entstehende Menge

$$\mathrm{im} f := f(A) := \{y \in B \colon \exists x (y = f(x))\}$$

heißt *Bildmenge (von f).*

Definition 2.2 (Komposition von Abbildungen)**.** Seien $f \colon A \to B$ und $g \colon B \to C$ Abbildungen. Dann definiert

$$h =\colon g \circ f \colon A \to C, \ x \mapsto g(f(x))$$

eine neue Abbildung, die *Komposition* oder *Verkettung* von g mit f.

Definition 2.3 (Eigenschaften von Abbildungen)**.** Sei $f\colon A \to B$ eine Funktion.

- Gibt es für alle $y \in B$ ein $x \in A$ mit $y = f(x)$, dann heißt f *surjektiv.* Jedes Bildelement hat mindestens ein Urbildelement unter f.
- Gilt für alle $x, y \in A$, dass $f(x) = f(y)$, dann heißt f *injektiv.* Jedes Bildelement hat höchstens ein Urbildelement unter f.
- Ist f surjektiv und injektiv, so heißt f *bijektiv.*

Eine bijektive Funktion vermittelt also eine 1-zu-1-Beziehung zwischen den Elementen von zwei Mengen.

In der Algebra betrachtet man Strukturen, d.h. Mengen, die mit einer oder mehreren Relationen versehen ist. Man interessiert sich besonders für Abbildungen, die solche Strukturen erhalten.

Definition 2.4 (Homomorphismus)**.** Seien (X, R) und (Y, S) Mengen mit Relationen $R \subset X \times X$ und $S \subset Y \times Y$. Ist eine Abbildung $f\colon (X, R) \to (Y, S)$ gegeben mit

$$xRx' \implies f(x)Sf(x'),$$

wobei $x, x' \in X$, so nennen wir f einen *Homomorphismus (von Relationen*[2]*).*

Ein bijektiver Homomorphismus heißt *Isomorphismus.* Existiert ein Isomorphismus $f\colon A \to B$ zwischen zwei Strukturen, so nennen wir A und B *isomorph* zueinander und schreiben $A \cong B$.

Stehen also zwei Elemente in Relation zueinander, so stehen ihre Bildelemente unter einem Homomorphismus wieder in Relation zueinander (bezüglich der entsprechend auf den Mengen i.a. verschiedenen Relationen). Isomorphe Strukturen können hinsichtlich ihre relationalen Strukturen miteinander identifziert werden. Dies ist jedoch im allgemeinen keine materiale Identifikation, d.h. keine strikte mengentheoretische Identität.

Definition 2.5 (Äquivalenzrelation)**.** Sei $\sim \subset A \times A$ eine Relation, die folgende Eigenschaften erfüllt:

Reflexivität: Für alle $x \in A$ gilt $x \sim x$.

Symmetrie: Ist $x, y \in A$ mit $x \sim y$, so gilt $y \sim x$.

Transitivität: Ist $x, y, z \in A$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$, so gilt $x \sim z$.

Dann heißt $\sim$ eine *Äquivalenzrelation (auf A).*

Äquivalenzrelationen verallgemeinern also die strikte logische Identitätsrelation. Elemente werden bereits miteinander identifziert, wenn sie nur die Äquivalenzbedingung der vorgegebenen Relation erfüllt.

[2]Wir unterdrücken im folgenden die Abhängigkeit von den Relationen und schreiben nur $f\colon X \to Y$.

Definition 2.6 (Quotientenmenge)**.** Sei $\sim \subset A \times A$ eine Äquivalenzrelation auf A. Wir bezeichnen mit

$$[a] := \{b \in A \colon a \sim b\}$$

die *Äquivalenzklasse von a (bezüglich $\sim$)*. Die Menge

$$A/\!\sim\, = \{[a] \colon a \in A\}$$

heißt *Quotienten-* oder *Faktormenge von A bezüglich $\sim$*.

Die Menge $[a]$ enthält also genau die zu a (bezüglich $\sim$) äquivalenten Elemente. Es gilt $[a] \cap [b] =$ für $a \not\sim b$ und $[a] = [b]$ für $a \sim b$. Damit ist $A = \coprod_{a \in A} [a]$, d.h. die Äquivalenzklassen bilden eine sich nicht überlappende (*disjunkte*) Zerlegung der Menge A.

Definition 2.7 (Kanonische Projektion)**.** Ist $\sim \subset A \times A$ eine Äquivalenzrelation, so heißt die Abbildung

$$\pi \colon A \to A/\sim, \quad a \mapsto [a]$$

kanonische Projektion (von A bezüglich $\sim$).

Man kann zeigen, dass die kanonische Projektion stets ein surjektiver Homomorphismus ist.

Definition 2.8 (Kern)**.** Sei $f \colon A \to B$ ein Homomorphismus. Der *Kern von f* ist dann die Relation

$$\ker f := \{(x, y) \in A \times A \colon f(x) = f(y)\}.$$

Satz 2.9 (Homomorphie-/Isomorphiesatz)**.** *Sei $f \colon A \to B$ ein Homomorphismus. Dann ist* $\ker(f)$ *eine Äquivalenzrelation auf A und wir erhalten einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\tilde{f} \colon A/\ker f \to B$, sodass gilt $f = \tilde{f} \circ \pi$. Man sagt, folgendes Diagramm ist* kommutativ*:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & B \\
& A/\ker(f) \arrow[ur, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Beschränken wir den Bildbereich von f auf $\mathrm{im} f$*, so ist $\tilde{f}$ ein Isomorphismus*

$$\tilde{f} \colon A/\ker(f) \to \mathrm{im}(f), \quad [x] \mapsto f(x).$$

Der Isomorphiesatz erlaubt uns also, eine in Äquivalenzklassen zerlegte Menge mit einer weiteren, kompatiblen Menge zu identifizieren.

3 Monaden und Phänomene

3.1 Die Expressivität der Monaden

Der metaphysische Raums ist bei Leibniz auf den *Situs* zurückzuführen. Nach De Risi ist der Begriff des *Situs* allerdings unterbestimmt:

> ...there is no operational characterization of the concept of *Situs* having a genuinely metaphysical pregnancy. Nor does the approach through historical analysis prove of much help either.[3]

Monaden hingegen besitzen keinen *Situs*, sie sind nicht durch Positionen in einem Raum oder durch Abstände bestimmt. Leibniz schreibt:

> And to say that they are crowded together in a point or disseminated in space is to use certain fictions of our mind, ...there is involved no extension or composition of the continuum, and all difficulties about points dissapear. ...It will not be necessary on this ground, therefore to set up certain indivisible localities, which throw us into ...difficulties.[4]

Fragen über die Konstitutiertheit von Raum und Materie werden in dieser Analyse also ausgelassen. Dies ist zweckmäßig für das Vorhaben, eine Phänomenologie der Monaden zu entwickeln.[5]

Monaden sind geistige, einfache, d.h. nicht zusammengesetzte Substanzen.[6] In unserer sinnlichen Wahrnehmung drücken sich die Monaden durch räumliche Phänomene aus. Folgend dem Prinzip der Vielheit in der Einheit[7] sind die Konzepte von Wahrnehmung und Synthese identisch.[8] Monaden individuieren sich durch die Menge ihrer inneren und äußeren Relationen (zu anderen Monaden). Die Menge aller dieser Relationen bildet die Menge der *Perzeptionen* der Monaden:

> Außerdem gibt es nur dieses, d.h. Perzeptionen und ihre Veränderungen, was man in der einfachen Substanz finden kann. Darin allein können alle *inneren Handlungen* der einfachen Substanzen bestehen.

Wir werden sehen, dass dies eine Formulierung des *Prinzips der universellen Harmonie* ist und infolgedessen die Menge aller Perzeptionen einer Monade wieder eine Monade bildet.

Zwischen der noumenalen Welt der Monaden und der phänomenalen Welt der sinnlichen Perzeptionen besteht eine Relation der des Ausdrucks (*Expression*), welche die Monaden entsprechend ihrer inneren und äußeren Relationen ihren jeweiligen *Phänomenen*

[3] [Ris07], S. 302
[4] Zitiert in [Ris07], S. 312
[5] De Risi behandelt diese Fragen im nachfolgenden Kapitel 4 in [Ris07].
[6] [Lei02], Mon 1
[7] [Lei02], Mon 12-13
[8] Vgl. [Ris07], S. 315: “Whenever there is perception, there is also synthesis, and every synthesis corresponds to a perception. ...”

oder Darstellungen zuordnet. Relationen zwischen den Monaden spiegeln sich als Relationen zwischen den korrespondierenden räumlichen Phänomenen wider. Die strukturerhaltende Eigenschaft der Ausdrucksrelation modelliert De Risi durch Homomorphismen (Def. 2.4). Motivation für diese Modell findet sich bei Leibniz, wenn er Sprache als Ausdruck von Gedanken oder eine Kreisgleichung als Ausdruck des Konzepts des Kreises nennt.[9] So drücke ein Kreis sowohl eine Ellipse, wie Hyperbel und Parabel aus, denn es existieren geeignete Transformationen dieser Figuren ineinander.[10]

Bei De Risi haben verschiedene Modi des Ausdrucks oder der Perzeption verschiedene Ausdruckshomomorphismen zufolge. Die Erkenntnis der Gesamtheit dieser Homomorphismen oder Modi der Wahrnehmung hätte die Erkenntnis der noumenalen Welt an sich, d.h. der unendlichen Monade, Gottes, zufolge.

Alle die Monaden individuierenden Eigenschaften sind mithin relationale Eigenschaften, nämlich die inneren und äußeren Perzeptionen einer Monade. Es bezeichne $\mathcal{M}(X, Y)$ die Menge der Relationen von einer Monade X zu einer Monade Y. De Risi folgend lässt sich das Prinzip der universellen Harmonie dann formulieren als:

$$\forall Z(\mathcal{M}(Z, X) \cong \mathcal{M}(Z, Y) \implies X = Y)$$

Monaden sind identisch, wenn sie die gleichen inneren und äußeren Relationen besitzen.[11]

Der Homomorphismus des Ausdrucks muss also auf der gesamten Menge der Monaden definiert werden. Jede Monade spiegelt sich und ihre Perzeptionen in jeder anderen wider. Ein nur partiell definierter Homomorphismus hätte eine Phänomenalwelt zur Folge, in der die Erscheinungen nicht gemäß ihrer konzeptionellen Ordnung in Beziehung stünden.[12] Somit würde es sich nicht um eine echte Wahrnehmung handeln. Folglich kann das Konzept der Welt nicht auf einer Ursubstanz beruhen. Die Menge der externen Relationen, d.h. Wahrnehmungen einer solchen Substanz, wäre leer und somit könnte aus ihr kein Phänomen resultieren. Die Konzeption der Welt hat höhere ontologische Priorität über die Konzeption einer einzelnen Substanz.[13]

Einfache geistige Substanzen drücken sich als *Extensa*, d.h. ausgedehnte Substanzen aus. Die räumliche Aggregation dieser Phänomene entspricht Vermöge der Perzeption der Aggregation der Monaden.

3.2 Der Expressionshomomorphismus für sinnliche Perzeption

Seien $\mathcal{M}$ die Menge der Monaden und $\mathcal{R}$ die Menge der Phänomene, d.h. Darstellungen der Monaden. Sei $\varepsilon \subset \mathcal{M} \times \mathcal{R}$ die Relation, welche einer Monade jedes ihrer Phänomene

[9] Vgl. [Ris07], S. 318

[10] Dies ist in der Geometrie als *projektive Äquivalenz* bekannt.

[11] Dieser Vorschlag legt nahe, das algebraische Modell auf einer kategorien- statt mengentheoretischen Grundlage zu formulieren. Das Prinzip der universellen Harmonie stellt sich dann als eine Folgerung aus dem bedeutenden sogenannten Yoneda-Lemma heraus. (Vgl. [Mac71], S. 59f.).

[12] [Lei02], Mon 58

[13] Vgl. [Ris07], S. 322.

zuordnet. Wir zeigen, dass ε eine Funktion ist.[14]

Satz 3.1. *Die Relation ε ist eine Funktion. Sie ist im allgemeinen weder injektiv, noch surjektiv.*

(i) Jede Monade besitzt mindestens ein Phänomen.

(ii) Jede Monade besitzt höchstens ein Phänomen.

(iii) Nicht jedes Phänomen stammt von höchstens einer Monade.

(iv) Nicht jedes Phänomen stammt von mindestens einer Monade.

Beweis. (i) Eine Monade wird bestimmt durch ihre Relationen zu allen anderen Monaden. Das Phänomen einer einzelnen Monade lässt sich also eindeutig zu einem Phänomen der ganzen Menge $\mathcal{M}$ aller Noumena fortsetzen. Nur die unendliche Monade, Gott, besitzt keine Darstellung, da sie nicht von ihren Relationen zu allen anderen Monaden eindeutig festgelegt ist.[15] Mithin ist jede endliche Monade räumlich durch ein Phänomen dargestellt.

(ii) Ein Phänomen respektiert die Perzeptionsrelation zwischen den Monaden. Diese erhält ε aufgrund des *Prinzips der Identität des Ununterscheidbaren.* Jedes Phänomen ist ein Aggregat von Substanzen.

Wir nehmen an, es gäbe zwei unterscheidbare Phänomene, die Ausdruck ein und derselben Monade wären. Die Phänomene als Darstellung einer Monade müssten dann zueinander kongruente qualitative und quantitative Eigenschaften besitzen. Aber dann wären diese Phänomene ununterscheidbar im Widerspruch zur Identität des Ununterscheidbaren.

(iii) Zwei unterschiedliche Monaden können dieselben Darstellungen als Phänomene besitzen. Leibniz führt als Beispiel Farben an. Es gibt keinen rein konzeptionellen Weg, Farben zu unterscheiden. Somit nehmen wir noumenale Eigenschaften, deren Phänomene sich nur in der Farbe ihrer Materie unterscheiden, als dieselben wahr.

(iv) Da die sinnliche Wahrnehmung grundsätzlich nicht deutlich, sondern verwirrt ist, gibt es Phänomene, die allein durch die Wahrnehmung induziert werden, nicht durch die Monaden selbst.

$\square$

Da die Ausdrucksrelation ε die Hierarchie der Monaden erhält, ist ε also ein Homomorphismus, der sogenannte *Expressionshomomorphismus.* Er ist im allgemeinen nicht bijektiv, also kein Isomorphismus. Man kann also ε als eine Transformation der Menge der Monaden $\mathcal{M}$ in die Menge der Phänomene $\mathcal{R}$ betrachten, die aber keine 1-zu-1-Identifikation darstellt.

[14] Vgl. [Ris07], S. 431 ff.

[15] Gott erkennt die Dinge an sich. Göttliches Denken kann also nicht durch beliebiges Wiederholen endlichen Denkens erreicht werden.

De Risi bezeichnet den Expressionshomomorphismus ε als nicht "ideal". Die fehlende Injektivität verhindere die Möglichkeit, ε könne eine logische "strukturelle Identität" zwischen den Monaden und den Phänomenene vermitteln. Außerdem sei ε nicht *intentional*, d.h. nicht surjektiv. Dies verhindere die Möglichkeit, aus einer "[rein] strukturellen" eine "logische Identität" zu gewinnen.[16]

Insbesondere ist ε nicht injektiv, da bereits die Wahrnehmung jeder endlichen Monade verwirrt ist, und sie somit gewisse unterschiedliche Monaden als gleich ansieht.[17] Diese grundsätzliche Einschränkung in der monadischen Perzeption bewirkt also die epistemologische Begrenzung des Homomorphismus ε, kein Isomorphismus zu sein.[18]

Wäre ε bijektiv, so entspräche die Ordnung der Monaden *exakt* der Ordnung der Phäonmene. Es bestünde nur ein terminologischer Unterschied zwischen beiden Welten. Aber Monaden sind nicht im Raum situiert. Ein solcher Isomorphismus dürfte also nicht als echte materiale Identität angesehen werden.

Es bestehen also monadische Relationen, die nicht durch Homomorphismen der Wahrnehmung oder zumindest nicht von der Gesamtheit aller dieser Homomorphismen erhalten werden.[19]
Die Monaden unterscheiden sich damit von Kants Noumena, die unabhängig von räumlichen Phänomenen existieren. Die Korrespondenz zwischen Noumena und dem Raum wäre bei Kant also kein Homomorphismus bezüglich der Relation zwischen den Noumena.

De Risi wendet sich gegen einen gelegentlichen Widerspruch zu Leibniz' Metaphysik:

> Leibniz's philosophy here has often been charged with a vicious circle. In Leibniz's theory, the only possible object of perception is the system of perceptions. Thus, according to such criticism, Leibniz canonly endow a monad with a determinate content (its series of perceptions) by deriving it from the determinations of the world, which however in turn is only determined by the content of representation of each monad.[20]

Dies stelle jedoch keinen Zirkelschluss dar, sondern eine Formulierung der höheren ontologischen Priorität des Konzepts der Welt über das das Konzept einzelner Substanzen. Dieses Prinzip drücke sich in der Intentionalität der Monaden aus, die als geistige Substanzen doch einen objektiven Bezug für ihre Phänomene benötigen:

> ... [Universal] harmony was nothing but the intentional character of the representation of each monad.[21]

Die simultane Erfassung aller Expressionen der Monaden als Phänomene genügt, um die noumenale Welt selbst zu erfassen:

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{R}) \cong \mathcal{M}.$$

[16]Vgl. [Ris07], S. 432
[17]Vgl. Abschnitt 3.5
[18]Vgl. [Lei02], Mon 60: "Nicht im Gegenstand, sondern in der Modifikation der Erkenntnis des Gegenstandes sind die Monaden beschränkt."
[19][Ris07], S. 326
[20][Ris07], S. 329
[21]Ebd.

3.3 Der Raum der Phänomene

De Risi unterscheidet zwischen Leibniz' Konzepten von Unendlichkeit. *Synkategorematische Unendlichkeit* ist unerreicht und bezeichnet die (idealisiert) bestehende Möglichkeit zur beliebigen Wiederholung einer endlichen Anzahl von Schritten. Dies entspricht der aristotelischen *potentiellen Unendlichkeit*.[22]

Die *kategorematische (erreichte) Unendlichkeit* ist nach Aristoteles nicht möglich. Die göttliche Unendlichkeit ist die eminente[23] *hyperkategorematische Unendlichkeit*.[24] Sie ist im Unterschied zum kategorematisch Unendlichen kein Grenzwert eines synkategorematischen Prozesses, sondern ein echter Sprung.[25]

Die einzelnen monadischen Darstellungen sind extensiv wie intensiv endlich. Einerseits ist der Phänomenalraum begrenzt, d.h. auch Phänomene können nur endlich ausgedehnt sein. Andererseits können Phänomena als (aggregative) Extensa auf beliebig kleinen Skalen betrachtet werden. Dies spiegelt die begrenzte ästhetische Wahrnehmungskraft der einzelnen Monaden wieder.[26] De Risi bezeichnet dies als *Indefinitheit* des Raums.

Dies führt zur synkategorematischen Unendlichkeit des Phänomenalraums: wir können unsere Perzeptionen stets auf kleinere Längenskalen richten, doch erreicht dieser Prozess in unserer Wahrnehmung keinen Grenzwert. Diese Begrenzung unserer Wahrnehmung verhindert, dass der Expressionshomomorphismus ein Isomorphismus würde. Wie im Argument gegen die Existenz einer einzelnen Ursubstanz wird hier auch das damit verbundene Übertragungsprinzip klar: einzig, da wir Monaden nur anhand der Unterschiedlichkeit ihrer Phänomene unterscheiden können, bewirkt die Begrenztheit unserer ästhetischen Wahrnehmung die Möglichkeit, dass überhaupt eine Vielfalt von Monaden existiert. Monaden sind keine "Geister", sie besitzen stets eine Darstellung als Phänomen.[27]

Nach de Risi überträgt sich die relationale Struktur der Welt der Monaden durch den Expressionshomomorphismus wie in Leibniz' Beispiel der Blickwinkel auf eine Stadt:[28]

(i) Betrachtet wird stets dieselbe Stadt, die Darstellungen der Monaden besitzen also stets denselben phänomenalen Raum.

(ii) Jede Monade erblickt die gesamte Stadt, jedoch stets aus ihrem eigenen, von keiner anderen Monade geteilten Blickwinkel. Dies bewirkt die Unterschiedlichkeit der monadischen Darstellungen.

(iii) Die Perzeption einer Monade ist nie ästhetisch vollkommen, d.h. stets graduell verzerrt. Eine Monade, die über eine andere dominiert (mittels umfassenderer Perzeption), besitzt stets ein größeres ästhetisches Wahrnehmungsvermögen.

[22] Hierauf gründet Leibniz auch seine Analysis: die Infinitesimalen sind *endliche Größen*, die aber durch jeweils endlich viele Rechenoperationen beliebig klein werden. Vgl. etwa [Art13a], Abschnitt 2.

[23] Vgl.[Lei02], MA 35

[24] [Ris07], S. 332

[25] Vgl. [Lei02], MA 36: "Was indessen gut und vernünftig bei den *endlichen* Geistern ist, findet sich bei [Gott] in *eminenter* Weise ..." [Kursive durch Verfasser]

[26] [Lei02], Mon 57

[27] Anderenfalls wäre die Expressionsrelation keine Abbildung, mithin kein Homomorphismus.

[28] [Ris07], S. 334

(iv) Jede Perzeption geht von einem Punkt in der Stadt aus. Die Phänomene der Monaden sind also in der Welt situiert.

Kann nun Gottes Wahrnehmungskraft mit dem gesamten Phänomenalraum identifiziert werden? De Risi argumentiert dagegen. Dies widerspreche der synkategorematischen Idealität des Raums. Weiterhin wäre dies ein Ausdruck der kategorematischen Unendlichkeit, die Leibniz stets ausschließe:

> God has no *Situs*, thus he is not a perspective like the other [monads] – he is outside the world.[29]

Existierte die Perspektive auf den gesamten Darstellungsraum als Ausdruck Gottes, so müsste sie durch den Expressionshomomorphismus vermittelt sein. Dieser ist jedoch stets material beschränkt, sonst könnten wir nicht zwischen Noumena und Phänomena unterscheiden. Desweiteren würde es sich um ein kategorematisch unendliches Phänomen handeln.

Die Darstellung Gottes, der unendlichen Monade, kann also kein Phänomen sein. In der Perzeption Gottes besteht kein Unterschied zwischen Noumena und Phänomena:

> . . . we should say (in a sense) that God is not a further and more perfect viewpoint, but the town itself. [30]

Göttliches Wissen ist nicht logische Deduktion. Es ist weder für endliches noch unendliches kategorematisches Denken zugänglich:

> Instead, God's way of knowing is by seeing at once the nexus between all things[,] which is certainly a more mysterious but in any case different eminence of the infinite . . .

Gott nimmmt die Welt nicht im Raum wahr. Im Unterschied zu den anderen Monaden ist seine Wahrnehmung nicht im Raum situiert. In Gottes *Perzeption* fallen Monaden mit ihren Darstellungen zusammen, nur in dessen *Apperzeption* findet die Unterscheidung statt.[31] Räume sind selbst nur Phänomene. Gott nimmt die noumenale Welt nicht als Raum, sondern an sich wahr. Der Raum der Phänomene ist kein *sensorium Dei.* Das Phänomen Gottes ist selbst nicht situiert.

Die Eminenz Gottes besteht in seiner Nicht-Intentionalität. Göttliches Denken ist wie jedes andere Denken die synthetische Einheit einer Vielheit. Aber Gott besitzt kein intentionales Bewusstsein, denn in ihm werden die göttliche Idee der Welt und die Welt selbst eins. Intentionalität ist also nicht konstituierend für Perzeption als solche, sondern sie stellt gerade die Begrenzung endlicher Perzeption dar.

Jede Monade induziert einen Homomorphismus in die Welt der Phänomene. Dies bewirkt die Grenzen für die Expressivität der Monade dar, denn keine dieser Homomorphismen kann also ein Isomorphismus sein. Nach de Risi lässt sich das System dieser Homomorphismen aber idealisiert zu einem Isomorphismus kombinieren: dem *idealen situationalen Isomorphismus* zwischen der noumenalen und der phänomenalen Welt.

[29][Ris07], S. 335
[30][Ris07], S. 336
[31]Vgl. [Lei02], Mon 14, 38

3.4 Intrinsische Grenzen des situationalen Isomorphismus

Der “nicht-expressive Teil”[32] des Situationsisomorphismus kann studiert werden, um die intrinsischen Grenzen einzelner endlicher Perzeptionen zu bestimmen.[33]

Da dieser Isomorphismus über die Homomorphismen als Perzeptionen jeder einzelnen Monade hinausgeht, wäre es denkbar, ihn als Perzeption der vollkommenen, unendlichen Monade zu betrachten. Aber hyperkategorematische Unendlichkeit geht über den kategorematischen Charakter des Isomorphismus hinaus. Somit muss der situationale Isomorphismus *ideal* sein. Er ist weder Perzeption einer endlichen Monade noch der unendlichen Monade, Gottes. Der Isomorphismus der Perzeption wäre die von Leibniz abgelehnte *Anima mundi*. Schließlich ermöglichte eine solche Weltseele die Perzeption des gesamten Phänomenalraums.

Die Unterschiede zwischen den Perzeptionen endlicher Monaden bewirken gerade die Unterscheidung der Monaden anhand ihrer Phänomene. Diese Unterscheidung ist ihrerseits notwendig, um von unterscheidbaren Substanzen überhaupt sprechen zu können. Die Annahme einer Weltseele ist also nicht mit den Annahmen über die Monaden vereinbar.

Eine Konstruktion dieses Isomorphismus käme einer “universellen Charakterisierung des Raums”: es würden sämtliche räumliche Perzeptionen in jedem endlichen Denken sichtbar.

Der ideale situationale Isomorphismus ist nicht die logische Identität. Logische Identität zwischen der noumenalen und phänomenalen Welt besteht nur in Gottes Apperzeption.

Dennoch müssen die einzelnen realen perzeptuellen Homomorphismen der Monaden aufgrund ihrer Expressivität in einer “harmonischen Relation” zueinander stehen. Der Situationsisomorphismus stellt den alle Teilrelationen respektierenden Grenzwert[34] dieses Systems von Homomorphismen dar. Er lässt sich zwar nicht konstruieren, aber seine Existenz im idealen Sinne macht genau das Prinzip der universellen Harmonie aus. Doch als kategorematisch Unendliches unterscheidet sich der Isomorphismus von der synkategorematischen Apperzeption Gottes. Also ist die Expressivität des situationalen Isomorphismus ebenfalls begrenzt. Er muss eine materiale Eigenschaft besitzen, die ihn vom Göttlichen trennt.

Eine Seele der Welt hätte perfektes Wissen der phänomenalen, aber nicht der noumenalen Welt, gerade, weil ein materialer Unterschied zwischen beiden Welten besteht.

Wir können Monaden nur durch ihre Expressionshomomorphismen studieren, d.h. rein empirisch. Wir können sie nicht apriorisch material bestimmen.

[32] Übersetzt aus [Ris07], S. 341, Z. 3

[33] Vgl. [Ris07], S. 341 ff.

[34] Diese Charakterisierung des Situationsisomorphismus legt die Interpretation als kategorientheoretischen Limes nahe, vgl. [Mac71], Kap. III, 4.

Die notwendige Verzerrung intermonadischer Relationen durch die Perzeption einer Monade hängt von der jeweiligen Monade sowie ihrem gegenwärtigen[35] Zustand ab. Die subjektiven Grenzen einer einzelnen Monade sind für ein endliches Denken nicht erfassbar.[36] Die rein phänomenalen Aspekte einer Darstellung sind diejenigen räumlichen Teilaggregate des Phänomens, die keine Monaden repräsentieren. Dies macht genau den "materialen Teil" des Situationsisomorphismus aus. Da Monaden nicht situiert sind, aber durch ihre Expressivität als Phänomene Raum erst entsteht, bestimmen also die materialen Komponenten des idealen Situationsisomorphismus Raum und *Situs* als solche.[37]

Jede monadische Darstellung ist situiert: jedes Phänomen, das ein Noumenon ausdrückt, drückt nicht-situierte monadische Relationen als situationale Relationen aus. Die Fortsetzung dieser Relationen auf die gesamte noumenale Welt gehört zum materialen Teil des Situationsisomorphismus. Sie spiegelt sich in jedem Phänomen wieder. Jedes Phänomen ist situiert und ausgedehnt. Dies erkennt de Risi als Leibniz' *Axiome der Intuition* wieder.[38]

Das Studium des nicht-expressiven Anteils des idealen situationalen Isomorphismus entspricht also dem phänomenologischen Studium des Raums gemäß den Perzeptionen jeder Monade. Die Begrenztheit des Situationsisomorphismus konstitutiert sowohl Phänomene als auch Räumlichkeit.

3.5 Der Expressionshomomorphismus für geistiges Wissen

Die Perzeptionen der Monaden lassen sich wie folgt einteilen:[39]

- Die *deutlichen und unterschiedenen Perzeptionen* stammen von Relationen, die deutlich ausgedrückt werden und die anhand ihrer darstellenden Phänomena durch den Geist unterschieden werden können. Dies sind die einzigen Perzeptionen, die wir als geistiges Konzept fassen können.

- Sinnliche Phänomene können (unendliche) Teilperzeptionen enthalten, die der (endliche) Geist nicht unterscheiden kann.[40][41] Dies sind die entsprechen *deutlichen und verwirrten Perzeptionen.*

- *Verborgene Perzeptionen* sind weder sinnlich noch intellektuell bestimmbar. Sie werden durch den Expressionshomomorphismus nicht respektiert.

[35] [Lei02], Mon 10

[36] De Risi sieht die empirische Psychologie als Studium dieser Grenzen an.

[37] Diese Sichtweise liegt das mathematische Modell eines *Faserbündels* nahe. Ein solches besteht aus einem sog. Basisraum B, dessen Struktur durch einen Morphismus $p\colon E \to B$ bestimmt ist, wobei E der sog. Totalraum ist. Der Totalraum B ist kein einfacher Raum, sondern wird vermöge $(b)_{x\in p^{-1}(b)}$ durch die Punkte $x \in E$ parametrisiert. Der Basisraum E zerfällt in die Fasern $E = \coprod_{b\in B} p^{-1}(b)$. Damit ist B kein "absoluter", sondern ein "relativer" Raum, dessen Struktur gerade extrinsisch durch einen Morphismus definiert wird. (Vgl. [MM92]. S. 79ff.)

[38] [Ris07], S. 341

[39] [Ris07], S. 354

[40] Vgl. [Par82], S. 6 f.

[41] Sie können nur in Koperzeption wahrgenommen werden, vgl. [Ris07], S. 350 f.

Wir können nun den Expressionshomomorphismus $\varepsilon_1\colon M \to \mathcal{R}_{\mathcal{C}}$ betrachten, wobei $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}$ die deutlichen Perzeptionen einer Monade bezeichnet. Da eine einzelne Monade nie die gesamte noumenale Welt $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}$ wahrnehmen kann, ist ε_1 nicht injektiv, also hat ε_1 stets *nichttrivialen* Kern, d.h. $\ker \varepsilon_1 \neq \{(x,x) \colon x \in \mathcal{M}\}$. Dies induziert eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{M}$. Bezeichnet $\mathcal{O}$ die Menge der verborgenen Eigenschaften der Monaden, dann erhalten wir die kanonische Projektion

$$\pi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}/\ker \varepsilon_1 = \mathcal{M} \setminus \mathcal{O} = \mathcal{C}.$$

Nach dem Homomorphiesatz 2.9 erhalten wir einen Isomorphismus $\mathcal{C} = \mathcal{M}/\ker \varepsilon_1 \to \mathrm{im}(\varepsilon_1) = \varepsilon_1(\mathcal{C})$.[42] Die Menge der sinnlichen Phänomene $\varepsilon_1(\mathcal{C})$ ist also in der Menge $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}$ enthalten. In $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}$ finden sich zudem die sich nicht sinnlich äußernden Darstellungen der Sinnlichkeit selbst. Wir erhalten eine nicht-strikt mengentheoretische Inklusion $\iota\colon \varepsilon_1(\mathcal{C}) \hookrightarrow \mathcal{R}_{\mathcal{C}}$ und somit folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[r, "\varepsilon_1"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathcal{R}_{\mathcal{C}} \\
M/\ker(\varepsilon_1) = \mathcal{C} \arrow[r, "\cong"'] & \varepsilon_1(\mathcal{C}) \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

Wir entwickeln nun ein entsprechendes Modell für geistiges Wissen. Dieses Modell ist eine Idealisierung, denn es existiert kein rein konzeptionelles endliches Wissen. Die Menge der sich unterscheidenden Ideen $\mathcal{R}_{\mathcal{D}}$ kann also nicht als solche definiert werden.
Idealerweise nehmen wir nun an, die Menge liege vor. Wir betrachten wie oben den Expressionshomomorphismus $\varepsilon\colon \mathcal{M} \to \mathcal{R}_{\mathcal{D}}$. Wir erhalten $\mathcal{M}/\ker(\varepsilon) = \mathcal{M} \setminus \mathcal{K} =: \mathcal{D}$, wobei $\mathcal{K}$ die Menge der Monaden bezeichnet, von denen (deutliche oder verborgene) verwirrte Wahrnehmungen existieren.

Die Menge der monadischen Eigenschaften, von denen es unterscheidbare Darstellungen $\mathcal{D}$ gibt, ist kleiner als die Menge der Eigenschaften mit deutlicher Darstellung $\mathcal{C}$.

Zentral in Leibniz' Theorie des Wissens ist die nicht nur isomorphe, sondern logische Identifikation der monadischen Eigenschaften, von denen es unterschiedene Darstellungen gibt mit diesen Darstellungen selbst. Die Mengen $\mathcal{D}$ und $\mathcal{R}_{\mathcal{D}}$ stellen sich daher als identisch heraus und wir erhalten:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d] & \mathcal{R}_{\mathcal{D}} \\
M/\ker(\varepsilon) = \mathcal{D} \arrow[ur, "="'] &
\end{tikzcd}$$

[42]Hierbei bezeichnet $A \setminus B$ das *mengentheoretische Komplement*, d.h. die Menge A ohne die Elemente der Teilmenge $B \subset A$.

Für den idealisierten Expressionshomomorphismus des Wissens erhalten wir die strikte Gleichheit

$$R_{\mathcal{D}} = \mathcal{D}.$$

Im Unterschied dazu zerfällt der Homomorphismus für sinnliche Darstellungen $\varepsilon_1 \colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ in einen Isomorphismus gefolgt von einer Inklusion:

$$\mathcal{C} \cong \varepsilon_1(\mathcal{C}) \hookrightarrow \mathcal{R}_{\mathcal{C}}$$

Dies beschreibt den Übergang von einer durch den Expressionshomomorphismus vermittelten abstrakten Darstellung zu einem konkreten Sinneseindruck. Betrachtet man an $\varepsilon_1(\mathcal{C})$ als gemeinen Menschenverstand, so reflektiert gerade die fehlende Surjektivität der Inklusion $\iota \colon \varepsilon_1(\mathcal{C}) \hookrightarrow \mathcal{R}_{\mathcal{C}}$ die Möglichkeit zu verwirrter Perzeption.

Geistige Wahrnehmung repräsentiert die Dinge an sich, dahr muss zwischen $\mathcal{R}_{\mathcal{D}}$ und $\mathcal{D}$ Identität bestehen. Lässt man selbst das materiale Element des Isomorphismus (die Inklusion) sowie die Begrenztheit der ästhetischen Wahrnehmung (Projektion auf einen Quotienten) außer acht, so bleibt die Identifikation $\varepsilon_1(\mathcal{C}) \cong \mathcal{C}$ immer noch ein bloßer Isomorphismus statt der Identität. Auch wenn ι und π_1 beides Identitäten wären[43], so hätten wir immer noch eine materiale Unterscheidung zwischen der räumlichen Welt der Phänomene und der nicht-räumlichen Welt der Noumena. Denn schließlich wird die Struktur der Bildmenge $\varepsilon_1(\mathcal{C})$ durch quantitative Relationen bestimmt im Unterschied zur Struktur auf $\mathcal{C}$. Quantitative Eigenschaften bestehen nur innerhalb verwirrter Perzeption, die erst durch die Wirkung ε_1 von $\mathcal{C}$ vermittelt werden.

Insgesamt erhalten wir folgende Situation:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[r, "\varepsilon_1"'] \arrow[rr, bend left, "\varepsilon"] \arrow[d, "\pi_1"] \arrow[dd, "\pi"', bend right] & \mathcal{R}_{\mathcal{C}} \arrow[r, "\varepsilon_2"'] & \mathcal{R}_{\mathcal{D}} \\
\underbrace{\mathcal{M}/\ker(\varepsilon_1)}_{=\mathcal{C}} \arrow[r, "\cong"] & \varepsilon_1(\mathcal{C}) \arrow[u, "\iota"] \arrow[ur, "\varepsilon_3"'] \arrow[d, "\pi_2"] & \\
\mathcal{M}/\ker(\varepsilon) \arrow[r, "="] & \varepsilon_1(\mathcal{C})/\ker(\varepsilon_3) \arrow[r, "="] & \mathcal{D} \arrow[uu, "\equiv"]
\end{tikzcd}$$

In unserem Modell kann also die durch den geistigen Homomorphismus ε induzierte Projektion π (bis auf Isomorphie) faktorisiert werden als die Projektion π_1 des sinnlichen Homomorphismus ε_1 gefolgt von einer weiteren Projektion π_2, welche Monaden miteinander identifiziert, die dieselben Phänomene besitzen.

Analog setzt sich ε zusammen aus dem sinnlichen Ausdrucksomomorphismus ε_1 und der Einbettung ε_2 der deutlichen Wahrnehmungen $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}$ in die unterscheidbaren Wahr-

[43]In diesem Fall ließe sich die Weltseele erkennen.

nehmungen $\mathcal{R}_\mathcal{D}$. Es zerfällt ε_2 wiederum in die Komposition $\iota^{-1} \circ \varepsilon_3$. Hierbei vermittelt ι die bijektive Korrespondenz zwischen den monadischen deutlichen Phänomenen $\mathcal{R}_\mathcal{C}$ und den sinnlich wahrnehmbaren deutlichen Phänomenen $\varepsilon_1(\mathcal{C})$, d.h. dem allgemeinen Menschenverstand.

Dabei ist die Menge $\varepsilon_1(\mathcal{C})$ eine Idealisierung. Wären wir fähig, zwei (quantitativ unterschiedliche) deutliche sinnliche Phänomene immer auf (qualitativ unterschiedliche) Ideen zurückzuführen, so würde ε_3 zu einem Isomorphismus (aber keiner strikten Identität, denn es besteht ein materialer Unterschied zwischen sinnlich wahrnehmbaren Eigenschaften und den zugrundeliegenden Ideen). Nach dem sogenannten *zweiten Isomorphiesatz*[44] besteht $\ker \varepsilon_3$ aus den ausdrückbaren verwirrten Ideen mit Ausnahme der verborgenen Ideen, d.h. genau den Ideen, die bereits durch den allgemeinen Menschenverstand erfasst sind.

4 Schlussbemerkung

De Risis Modell präzisiert, wie sich Leibniz' Raum durch die Phänomene gemäß der Ordnung zwischen den Monaden konstitutiert. Raum ist weder ein Kontinuum aus Punkten, noch entsteht er durch Anordnung von Körpern. Der Leibnizsche Raum ist eine "Ordnung von Situationen":

> I don't say, therefore, that space is an order of situation, but an *order of situations*, or an order according to which situations are disposed, and that abstract space is that order of situations when they are conceived as being possible.[45]

Raum gründet sich also nicht allein auf Extensa, sondern auf Möglichkeiten. Der ideale Raum ist die Ordnung sämtlicher Möglichkeiten.

Richard T. W. Arthur mahnt zur Vorsicht gegenüber einer phänomenalistischen Interpretation Leibnizens. Raum entsteht nicht erst dadurch, dass wir Perzeptionen haben:

> The causes of the phenomena, too, must be outside you, and also outside other thinking beings, since they appear consonant with many things ...[46]

Literatur

[Art13a] Richard T.W. Arthur, *Leibniz's syncategorematic infinitesimals*, Archive for History of Exact Sciences **67** (2013), no. 5, 553–593.

[Art13b] ______, *Leibniz's theory of space*, Foundations of Science **18** (2013), no. 3, 499–528.

[44] Vgl. [BS12], Kap. II, Satz 6.15.
[45] Zitiert nach [Art13b], S. 35
[46] Zitiert nach [Art13b], S. 32

[BS12] S. Burris and H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2012.

[Lei02] Gottfried Wilhelm Leibniz, *Monadologie und andere metaphysische Schriften*, Felix Meiner Verlag, 2002.

[Mac71] Saunders MacLane, *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, New York, 1971, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5. MR MR0354798 (50 #7275)

[MM92] Saunders MacLane and Ieke Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*, corrected ed., Springer, May 1992.

[Par82] G.H.R. Parkinson, *The "intellectualization of appearances": Aspects of Leibniz's theory of sensation and thought*, Leibniz: Critical and Interpretive Essays (1982).

[Ris07] Vincenzo De Risi, *Geometry and monadology: Leibniz's analysis situs and philosophy of space*, Birkhäuser, 2007.