NETZE IN METRISCHEN RÄUMEN

JONATHAN WEINBERGER

16. DEZEMBER 2009

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung. Netze sind Verallgemeinerungen von Folgen. Ihre Konvergenztheorie bietet gewisse Analogien zu der von Folgen, liefert aber im Kontext allgemeiner metrischer und insbesondere topologischer Räume grundlegendere strukturelle Einsichten. Im folgenden zeigen wir elementare Resultate über Netzkonvergenz in metrischen Räumen und einige Anwendungen in der reellen Analysis. An geeigneten Stellen geben wir einen Ausblick auf das Verhalten von Netzen in allgemeinen topologischen Räumen.
Dies ist eine Ausarbeitung zu dem Proseminar „Topological Spaces“ bei Prof. Dr. Roch im Wintersemester 2009/2010 an der Technischen Universität Darmstadt.

1. Netze und Konvergenz

Definition 1.1. Eine *gerichtete Menge* $(I, \leq)$ ist eine Menge I mit einer *transitiven* und *induktiven* binären Relation $\leq$:

(T) Für alle $a, b, c \in I$ mit $a \leq b$ und $b \leq c$ gilt $a \leq c$.
(I) Für alle $a, b \in I$ gibt es ein $c \in I$, sodass $a, b \leq c$.

Bemerkung. Wenn außerdem zuweilen klar ist, dass wir von der Richtungsrelation $\leq$ auf I sprechen, so kürzen wir das Paar $(I, \leq)$ mit I ab.

Beispiel.

- Es bildet $\mathbb{N}$ mit der üblichen Ordnung eine gerichtete Menge.
- Für einen geordneten Körper K mit $x := (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ ist
$$x \leq y \quad :\Leftrightarrow \quad x_i \leq y_i \text{ für alle } i = 1, \dots n$$
eine Richtung auf K^n. Diese Relation ist nicht total, d.h. es gibt Elemente in K^n, die unter ihr nicht geordnet sind.
- Für eine Menge M ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ eine gerichtete Menge mit der Teilmengenrelation $A \leq B :\Leftrightarrow A \subset B$. Denn für $A, B \in \mathcal{P}(M)$ gilt stets $A, B \leq A \cup B$. Auch definiert die Obermengenrelation $A \trianglelefteq B :\Leftrightarrow A \supset B$ eine Richtung auf $\mathcal{P}(M)$. Denn analog gilt für $A, B \in \mathcal{P}(M)$, dass $A, B \trianglelefteq A \cap B$. Diese Relationen sind ebenso im allgemeinen nicht total.

Damit können wir nun Netze definieren.

Definition 1.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein *Netz (in X)* ist eine gerichtete Menge $(I, \leq)$ zusammen mit einer Abbildung $(x_i)_{i \in I} \colon I \to X$. Synonym nennt man ein Netz auch *Moore-Smith-Folge*. Analog zur Folgennotation schreiben wir für das Netz auch (x_i) und $x_j := (x_i)_{i \in I}(j)$ für den Wert des Netzes an der Stelle j.

Definition 1.3. Sei $p \in X$. Dann heißt ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ *konvergent gegen* p, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ einen Index $i_0 \in I$ gibt, sodass $d(x_i, p) < \varepsilon$ für alle $i \in I$ mit $i_0 \leq i$.

Beispiel.

- Für eine Menge M ist jede M-wertige Folge ein Netz mit der gerichteten Menge $(\mathbb{N}, \leq)$.
- Sei $[a, b]$ ein relles Intervall und $\mathcal{P}$ die Menge aller Zerlegungen von $[a, b]$ gerichtet durch die Teilmengenrelation. Für eine Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ist die Abbildung einer Zerlegung auf eine Riemannsche Ober- oder Untersumme je ein Netz in $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}_f\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R},\ (x_0, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \cdot \inf\{f(x)\colon x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$\mathcal{U}_f\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R},\ (x_0, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \cdot \sup\{f(x)\colon x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Diese konvergieren genau dann gegen dieselbe reelle Zahl, wenn das Riemannsche Integral $\int_a^b f$ existiert und dann ist dieses auch der Grenzwert.

Satz 1.4 (Eindeutigkeit des Grenzwerts)**.** *Sei $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in X. Für $p, q \in X$ mit $(x_i)_{\in I} \longrightarrow p$ und $(x_i)_{\in I} \longrightarrow q$ folgt $p = q$.*

Beweis. Angenommen, es wäre $p \neq q$. Dann hätten wir $\varepsilon := d(p, q) > 0$. Nach Voraussetzung der Konvergenz gäbe es $i_1, i_2 \in I$ mit

$$d(x_i, p) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad d(x_i, q) < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $i \in I$, die $i_1, i_2 \leq i$ erfüllten. Aufgrund der Induktivität der gerichteten Menge I existierte stets ein solcher Index i. Damit implizierte die Dreiecksungleichung den Widerspruch

$$d(p, q) = \varepsilon \leq d(x_i, p) + d(x_i, q) < \varepsilon.$$

Also gilt $p = q$. $\square$

Bemerkung. In allgemeinen topologischen Räumen sind die Grenzwerte konvergenter Netze nicht notwendigerweise eindeutig bestimmt. Äquivalent zur Eindeutigkeit ist, dass der Raum die *Hausdorffsche Trennungseigenschaft* erfüllt, d.h. zwei Punkte lassen sich durch disjunkte offene Umgebungen voneinander „trennen“.

Beispiel. Man beachte, dass konvergente Netze nicht beschränkt sein müssen. Dies zeigt etwa das Netz $\left(\frac{1}{x}\right)_{x\in\mathbb{R}^+}$, wobei $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ durch $\leq$ gerichtet sei. Es gilt zwar $\left(\frac{1}{x}\right)_{x\in\mathbb{R}^+} \longrightarrow 0$, aber $\left(\frac{1}{x}\right)_{x\in\mathbb{R}^+}$ ist unbeschränkt.

Dieses Beispiel deutet gleichzeitig an, wie sich Grenzwerte von Funktionen durch Netze beschreiben lassen. Die folgende Liste bietet eine erste Übersicht:

Beispiel (Klassische Funktionsgrenzwerte)**.**

(1) Wir richten $\mathbb{R}^+$ wieder durch die natürliche Ordnung $\leq$. Sei $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $p \in \mathbb{R}$. Dann ist äquivalent:
  (i) $(f(x))_{x\in\mathbb{R}^+} \longrightarrow p$
  (ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}^+$, sodass $|f(x) - p| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ mit $x_0 \leq x$.
  (iii) $\lim_{x\to\infty} f(x) = p$

(2) Wir richten $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vermittels

$$x < y \quad :\Leftrightarrow \quad |x| > |y|.$$

Für eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{R}$ sind äquivalent:
  (i) $(f(x))_{x\in\mathbb{R}^\times} \longrightarrow p$

(ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}^\times$, sodass $|f(x) - p| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}^\times$ mit $|x_0| > |x|$.
(iii) $\lim_{x\to 0} f(x) = p$

(3) Definieren wir auf $\mathbb{R}$ die Richtung
$$x < y \quad :\Leftrightarrow \quad |x| < |y|,$$
so ist für eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ äquivalent:
(i) $(f(x))_{x\in\mathbb{R}} \longrightarrow p$
(ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$, sodass $|f(x)-p| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x_0| < |x|$.
(iii) $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = p$

Sei im folgenden (X, d) ein metrischer Raum. Wir erinnern uns daran, dass ein metrischer Teilmraum $U \subset X$ eine *Umgebung* des Punkts $p \in X$ genannt wird, wenn U eine ε-Kugel um p enthält.

Satz 1.5. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*
(i) *Das Netz $(x_i)_{i\in I}$ konvergiert gegen $p \in X$.*
(ii) *Zu jeder offenen Umgebung U um p gibt es einen Index $i_0 \in I$ mit $x_i \in U$ für $i_0 \leq i$.*

Beweis. Es gelte $(x_i)_{i\in I} \longrightarrow p$. Ist $U \subset X$ offen und $p \in U$, so gibt es eine ε-Kugel in U, die p enthält. Zu diesem ε existiert aus Konvergenzgründen ein Index i_0, sodass $d(x_i, p) < \varepsilon$ für alle i mit $i_0 \leq i$, d.h. $x_i \in B_\varepsilon(p) \subset U$. Zur Umkehrung bemerken wir, dass (ii) insbesondere für den Spezialfall offener Kugeln gilt. Dies ist gerade die Definition von Netzkonvergenz. □

Satz 1.6. *Wir betrachten $Y \subset X$ und $p \in X$. Es ist p ein Berührpunkt von Y genau dann, wenn es ein Netz mit Werten in Y gibt, dass gegen p konvergiert.*

Beweis. Ist p ein Berührpunkt von Y, so gibt es bekannterweise eine Y-wertige Folge, die gegen p konvergiert. Da jede Folge ein Netz ist, ergibt sich die Behauptung. Sei umgekehrt $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz mit Werten in Y und $(x_i)_{i\in I} \longrightarrow p$. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $i_0 \in I$, sodass $x_i \in B_\varepsilon(p)$, falls $i_0 \leq i$. Daraus folgt $B_\varepsilon(p) \cap Y \neq \emptyset$. Insgesamt liegt also in jeder ε-Kugel um p ein Punkt aus Y und daher auch in jeder Umgebung von p. □

Satz 1.7 (Netzstetigkeit)**.** *Eine Abbildung $f\colon (X, d) \to (Y, d')$ zwischen metrischen Räumen ist genau dann stetig in einem Punkt $p \in X$, wenn für jedes Netz $(x_i)_{i\in I}$ mit Werten in X und $(x_i)_{i\in I} \longrightarrow p$ das Netz $(f(x_i))_{i\in I}$ in Y gegen $f(p)$ konvergiert.*

Beweis. Folgt für jedes Netz $(x_i)_{i\in I}$ aus $(x_i)_{i\in I} \longrightarrow p$, dass $(f(x_i))_{i\in I} \longrightarrow f(p)$ gilt, so ist f folgenstetig und damit stetig. Sei nun umgekehrt f stetig in p und $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz, das gegen p konvergiere. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass aus $d(x, p) < \delta$ für $x \in X$ die Abschätzung $d'(f(x), f(p)) < \varepsilon$ folgt. Nach Definition der Netzkonvergenz gibt es zu δ ein $i_0 \in I$, sodass für alle i mit $i_0 \leq i$ gilt $d(x_i, p) < \delta$. Also folgt aus Stetigkeitsgründen $d'(f(x_i), f(p)) < \varepsilon$ für jedes i mit $i_0 \leq i$. Das bedeutet gerade $(f(x_i))_{i\in I} \longrightarrow f(p)$. □

Bemerkung. Jede stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen ist auch folgenstetig, die Umkehrung gilt jedoch nicht. Der obige Satz bietet einen Ausblick auf die Tragweite des Netzbegriffs. Denn „Netzstetigkeit“ im Sinne von Satz 1.7 ist in der Tat auch in allgemeinen topologischen Räumen äquivalent zur Stetigkeit.

2. REELLWERTIGE NETZE

Satz 2.1 (Konvergenz der Summe von Netzen)**.** *Seien $(I, \trianglelefteq)$ und $(J, \preceq)$ gerichtete Mengen. Auf dem Produkt $I \times J$ definieren wir eine Richtung durch*
$$(i, j) \leq (i', j') \quad :\Leftrightarrow \quad i \trianglelefteq i' \text{ und } j \preceq j'.$$
Seien $(x_i)_{i\in I} \longrightarrow x$ und $(y_j)_{j\in J} \longrightarrow y$ in $\mathbb{R}$ konvergente Netze. Dann gilt
$$(x_i)_{i\in I} + (y_j)_{j\in J} := (x_i + y_j)_{(i,j)\in I\times J} \longrightarrow x + y.$$

Beweis. Zu einer reellen Zahl $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ gibt es nach Voraussetzung Indizes $i_0 \in I$, $j_0 \in J$, sodass $|x_i - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|y_j - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle i mit $i \trianglelefteq i_0$ und j mit $j \preceq j_0$ gilt. Nach Definition der Richtung $\leq$ auf $I \times J$ gilt dann

$$|x_i - x| + |y_j - y| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für alle Paare (i, j), die $(i_0, j_0) \leq (i, j)$ erfüllen. Die Dreiecksungleichung liefert

$$|(x_i + y_j) - (x + y)| \leq |x_i - x| + |y_j - y|$$

und damit die Behauptung. $\square$

Satz 2.2. *Für $x \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir auf $V_x := \mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ die Richtung*

$$z \trianglelefteq_x y :\Leftrightarrow \|y - x\| \leq \|z - x\|,$$

wobei wir abkürzend V für V_x schreiben und $\trianglelefteq$ für $\trianglelefteq_x$. Dann definiert jede Funktion $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Netz $(f(t))_{t \in V}$. Es gilt $(f(t))_{t \in V} \longrightarrow p$ genau dann, wenn $\lim_{t \to x} f(t) = p$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\trianglelefteq$ eine Richtung auf V definiert. Seien $y, y', y'' \in V$ mit $y \trianglelefteq y'$, $y' \trianglelefteq y''$, d.h. $\|y' - x\| \leq \|y - x\|$ und $\|y'' - x\| \leq \|y' - x\|$. Dann folgt aus der Transitivität der Ordnung auf $\mathbb{R}$, dass $\|y'' - x\| \leq \|y - x\|$, also $y \trianglelefteq y''$. Dies zeigt die Transitivität von $\trianglelefteq \subset V \times V$. Zur Induktivität betrachten wir $z, z' \in V$ mit $\varepsilon := \min\{\|z - x\|, \|z' - x\|\}$. Dann gilt $\varepsilon > 0$ und wir wählen $z'' \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Wir erhalten $\|z'' - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$, also $z, z' \trianglelefteq z''$.
Sei nun $(f(t))_{t \in V} \longrightarrow p$. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $t_0 \in V$, sodass für alle $t \in V$ mit $\|t - x\| \leq \|t_0 - x\|$ gilt $|f(t) - p| < \varepsilon$. Setzen wir $\delta := \|t_0 - x\|$, so erhalten wir, $\|t - x\| \leq \delta$ impliziert $|f(t) - p| < \varepsilon$. Das bedeutet $\lim_{t \to x} f(t) = p$. Sei nun umgekehrt $\lim_{t \to x} f(t) = p$ angenommen. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $\delta > 0$, sodass aus $\|t - x\| < \delta$ folgt $|f(t) - p| < \varepsilon$. Wegen der Induktivitätseigenschaft von $\trianglelefteq$ auf V können wir ein $t_0 \in V$ und stets weitere $t' \in V$ festsetzen mit $\|t' - x\| \leq \|t_0 - x\| < \delta$. Für diese gilt dann $|f(t') - p| < \varepsilon$ und damit folgt die Behauptung $(f(t))_{t \in V} \longrightarrow p$. $\square$

Literatur

[1] Buskes, G. *Topological Spaces.* Springer, 1997.
[2] Willard, S. *General Topology.* Addison-Wesley, 1998.