

Leibnizschule Offenbach

Fachbereich II: Gesellschaftswissenschaften

Besondere Lernleistung im Fach Ethik zur
Abiturprüfung

**Eine erkenntnistheoretische Betrachtung der
Mathematik in Zusammenhang mit Kants
transzendentaler Ästhetik und der
logizistischen Kritik**

Jonathan Weinberger

27. Februar 2008

Prüfer: Str. Johannes Preissner

Zusammenfassung

Diese Jahresarbeit diskutiert epistemologische und ontologische Interpretationen der Mathematik. Insbesondere zählen dazu Kants transzendente Ästhetik in der Elementarlehre, die sogenannte Grundlagenkrise der Mathematik zu Beginn des 20. Jahrhunderts und der Bezug der Mathematik zu den Natur- und Geisteswissenschaften. Abgedeckt werden dabei Aspekte der vom Lehrplan des Hessischen Kultusministeriums vorgeschriebenen Themen „Anthropologische Grundannahmen“ (12.1), „Konkurrierende Normbegründungen in der [philosophischen] Tradition“ (12.2), „Vernunft“ (12.1/2), „Naturbegriff“ (13.1) sowie das fakultative Thema „Wissenschaftstheorie“ (12.1).

Stichwörter: Erkenntnistheorie, Philosophie der Mathematik, transzendental, Ästhetik, Logizismus, Kritik der reinen Vernunft, Immanuel Kant, Gottlob Frege, Bertrand Russell

Eidesstattliche Erklärung

Diese Jahresarbeit als besondere Lernleistung im Fach Ethik zur Abiturprüfung habe ich ausschließlich unter Zuhilfenahme der angegebenen Quellen und technischen Hilfsmittel angefertigt. Sämtlicher Text wurde gesetzt unter \TeX (\LaTeX 2 $_{\epsilon}$ mit \BIBTeX und $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\text{\TeX}$ -Paketen). \TeX ist ein eingetragenes Warenzeichen der American Mathematical Society.

Jonathan Weinberger

Offenbach am Main, den 27. Februar 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
1.1	Die Mathematik in Kants epistemologischem Hauptwerk	4
1.2	Die Kritik durch den Logizismus	5
1.3	Eine Mathematikphilosophische und -historische Begründung der Problematik von Kants Erörterungen	5
2	Die Mathematikphilosophie der transzendentalen Ästhetik	6
2.1	Vorbereitungen	6
2.1.1	Das „Herumtappen“ der Metaphysik und der „sichere Gang“ der Logik . .	6
2.1.2	Die Erkenntnisart der Mathematik und Physik	7
2.1.3	Die Kopernikanische Wende in der Metaphysik	8
2.1.4	Die <i>Kritik der reinen Vernunft</i> als „Traktat der Methode“	9
2.1.5	Das Fehlen der Moralphilosophie in der <i>Kritik der reinen Vernunft</i>	9
2.1.6	Die Charakterisierung apriorischer Urteile durch ihre Notwendigkeit . . .	10
2.1.7	Der Anspruch an die Metaphysik	12
2.1.8	Die Urteile der reinen Vernunft	12
2.1.9	Das Prinzip synthetischer, apriorischer Urteile in der Mathematik, Physik und Metaphysik	13
2.1.10	Die reine Vernunft und ihre Kritik	15
2.1.11	Aufbau der Transzendentalphilosophie	15
2.2	Die transzendente Ästhetik in der transzendentalen Elementarlehre	16
2.2.1	Die Isolation der Sinnlichkeit	16
2.2.2	Höffe zur Dialektik von Rationalismus und Empirismus in der transzendentalen Ästhetik	17
2.2.3	Die metaphysischen und transzendentalen Erörterungen	17
2.2.4	Die Geometrie in den Erörterungen des Raumes	18
2.2.5	Möglichkeiten nichteuklidischer Geometrien und Prioritätsunterschiede zur Newtonschen Philosophie	20
2.2.6	Unterschiede zu Leibniz' Philosophie das Subjekt und die Dinge an sich betreffend	22
2.2.7	Die empirische Realität und transzendente Idealität des Raumes	23
2.2.8	Kausalität und die notwendige Apriorität der Zeit	24
2.2.9	Innere Sinnlichkeit. Die Zeit als subjektive Bedingung der menschlichen Anschauung	25
2.2.10	Die empirische Realität und transzendente Idealität der Zeit	25

2.2.11	Eduard von Hartmanns Dilemma der subjektiven Abhängigkeit von Synthetizität und Analytizität eines Urteils	26
2.2.12	Kants Diskussion von Argumenten wider die transzendente Ästhetik	27
2.3	Die Kritik durch den Logizismus	28
2.3.1	Freges Kritik an Kants „innerer Anschauung“	28
2.3.2	Die Russellsche Antinomie und die <i>Principia Mathematica</i>	30
2.3.3	Russells Kritik an Kants metaphysischen Argumenten und der transzendentalen Erörterung	32
2.3.4	Das Scheitern der Typentheorie und das Ende des Logizismus	33
3	Konklusion	35
3.1	Widersprüche der unendlichen Anschauungen	35
3.2	Das Rekursionsprinzip als Widerlegung der notwendigen Synthetizität arithmetischer Urteile	35
3.3	Die Hinfälligkeit der reinen Anschauung	36
3.4	Der Zirkelschluss der Erörterungen	36
	Mathematische Notationen	38
	Literaturverzeichnis	38

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Die Mathematik in Kants epistemologischem Hauptwerk

Die *Kritik der reinen Vernunft* ist Immanuel Kants erkenntnistheoretisches Hauptwerk. Ursprünglich wird sie 1781 herausgegeben. Die zweite Auflage erscheint in erweiterter Fassung sechs Jahre später. Der Titel steht für eine Beurteilung des reinen Denkens durch sich selbst. Diese Kritik ist nicht notwendigerweise negativ. Die reine Vernunft bezeichnet das erfahrungsunabhängige Denken.

Die *Vorrede* der zweiten Auflage nimmt Bezug auf den damaligen erkenntnistheoretischen Status verschiedener Wissenschaften. Diese sind die Logik, Mathematik und Physik im Kontrast zur philosophischen Metaphysik. Die *Einleitung* definiert wesentliche Begriffe. Auf dieser Grundlage diskutiert sie die Möglichkeiten und Beschränkungen der Metaphysik und Transzendentalphilosophie sowie deren Selbstkritik. Der Hauptteil der *Kritik* zerfällt in die *transzendente Elementarlehre* und die *transzendente Methodenlehre*.

Die transzendente Elementarlehre behandelt die Bedingungen möglicher Erkenntnis. Die Mathematik als Wissenschaft zusammenführender, unabhängiger Schlüsse wird in der *transzendentalen Ästhetik* diskutiert. Kant führt die Möglichkeit reiner Mathematik auf die fundamentalen apriorischen Anschauungen des Raumes und der Zeit zurück. Der Raum bewirkt die Möglichkeit von Geometrie und die Zeit ist die Ursache der Fähigkeit zur Arithmetik.

Die *transzendente Logik* hingegen ist die Theorie des Verstandes. Sie besteht wiederum aus zwei Teilen. In der *transzendentalen Analytik* werden die Möglichkeiten des reinen, erfahrungslosen Verstandes untersucht. Als Werkzeuge dienen die sogenannten Kategorien. Das sind reine Verstandesbegriffe, mittels derer das Subjekt erkenntnistheoretische Urteile fällt. Sie liefern damit aber nicht notwendigerweise Erkenntnis des wahrhaftigen Seins, der Dinge an sich. Im Verstand geschieht die Vermittlung zwischen den Kategorien und den Erscheinungen durch sogenannte Schemata. Die *transzendente Dialektik* befasst sich mit den Themen der speziellen Metaphysik, nämlich den Prinzipien von Gott, Freiheit und Unsterblichkeit.

Nach dieser Abhandlung über die Anschauung einerseits und den reinen Verstand andererseits als notwendige Bedingungen reiner Erkenntnis untersucht die *transzendente Methodenlehre* als zweiter Hauptteil der *Kritik* konkrete Umsetzungen reiner Erkenntnisfähigkeit unter Beachtung ihrer Grenzen.

Die Mathematik als Prinzip von Sinnlichkeit a priori hat also ihre größte Rolle in der transzendentalen Ästhetik der Elementarlehre. Daher steht die Ästhetik im Mittelpunkt unserer Betrachtung. Wir erörtern zunächst Kants Vorgehen. Das geschieht dialektisch mit der Kritik durch gewisse

Philosophen. Wir beziehen uns insbesondere auf einen Kommentar von Karl Robert Eduard von Hartmann aus dem 19. Jahrhundert, sowie auf die zeitgenössischen Philosophen Otfried Höffe und Holm Tetens.

1.2 Die Kritik durch den Logizismus

Eine weitere entscheidende Entwicklung nimmt die Mathematikphilosophie um die Wende des 20. Jahrhunderts. Die Philosophen Gottlob Frege, Bertrand Russell, Alfred North Whitehead und Rudolf Carnap versuchen die Mathematik im sogenannten logizistischen Programm auf eine rigorose Grundlage zu stellen. Der Prozess scheitert jedoch. Die Entdeckung und Folgerung mehrerer Paradoxa der bis dahin bekannten Mengenlehre führen zur Grundlagenkrise.

Doch gerade dieser Konflikt ist Ausgangspunkt zur Bildung weiterer philosophischer Schulen. Die kritische Auseinandersetzung der Logizisten mit der bis dato formulierten Mathematikphilosophie ist ein wesentlicher Grund dafür. In diesem Zusammenhang analysieren wir Freges und Russells Kritik an Kants transzendentalphilosophischer Abhandlung.

1.3 Eine Mathematikphilosophische und -historische Begründung der Problematik von Kants Erörterungen

Die formulierten Thesen und Antithesen führen wir zu einer Synthese. Diese legt uneinsichtige, falsche und tautologische Prämissen der transzendentalen Ästhetik dar. Unter Beachtung der jüngeren Entwicklung der Mathematik geben wir einen Ansatz zu einer alternativen Deutung von Kants Theorie.

Kapitel 2

Die Mathematikphilosophie der transzendentalen Ästhetik

2.1 Vorbereitungen

Der Metaphysik ... ist das Schicksal bisher noch so günstig nicht gewesen, daß sie den sichern Gang einer Wissenschaft einzuschlagen vermocht hätte ... In ihr muß man unzählige mal den Weg zurück tun, weil man findet, daß er dahin nicht führt, wo man hin will, und was die Einhelligkeit ihrer Anhänger in Behauptungen betrifft, so ist sie noch so weit davon entfernt, daß sie vielmehr ein Kampfplatz ist, der ganz eigentlich dazu bestimmt zu sein scheint, seine Kräfte im Spielgefächte zu üben, auf dem noch niemals irgend ein Fechter sich auch den kleinsten Platz hat erkämpfen und auf seinen Sieg einen dauerhaften Besitz gründen können. Es ist also kein Zweifel, daß ihr Verfahren bisher ein bloßes Herumtappen, und, was das Schlimmste ist, unter bloßen Begriffen, gewesen sei.¹

Daß es nun dergleichen notwendige und im strengsten Sinne allgemeine, mithin reine Urteile a priori, im menschlichen Erkenntnis wirklich gebe, ist leicht zu zeigen. Will man ein Beispiel aus Wissenschaften, so darf man nur auf alle Sätze der Mathematik hinaussehen. ...²

Immanuel Kant

2.1.1 Das „Herumtappen“ der Metaphysik und der „sichere Gang“ der Logik

Die *Vorrede zur zweiten Auflage* diskutiert die Möglichkeiten der Metaphysik als Wissenschaft. Sie beginnt mit einer Bestandsaufnahme³:

Wenn [die Metaphysik] nach viel gemachten Anstalten und Zurüstungen, so bald es zum Zweck kommt, in Stecken gerät, oder, um diesen zu erreichen, öfters wieder zurückgehen und einen andern Weg einschlagen muß; imgleichen wenn es nicht möglich ist, die verschiedenen Mitarbeiter in der Art, wie die gemeinschaftliche Absicht erfolgt

¹[5], S. 432 f.

²Ebd., S. 462

³Vgl. ebd., S. 426 ff.

werden soll, einhellig zu machen: so kann man immer überzeugt sein, daß ein solches Studium bei weitem noch nicht den sicheren Gang einer Wissenschaft eingeschlagen, sondern ein bloßes Herumtappen sei . . .

Nichtdestotrotz ist es eine bemerkenswerte Leistung der Vernunft, sich innerhalb dieses „Herumtappens“ zurechtzufinden, „sollte auch manches als vergeblich aufgegeben werden müssen“. Die Logik hat im Unterschied zur Metaphysik den „sicheren Gang“ hinter sich. Seit Aristoteles ist sie keinen Schritt zurückgegangen, wenngleich sie sich auch nicht fortentwickelt hat. Neue Strömungen wie die Erweiterung um „*psychologische . . . teils metaphysische . . . teils anthropologische*“ Aspekte sieht Kant nicht als eine „Vermehrung“, sondern eine „Verunstaltung“. Einzig der Einschränkung, dass sie eine Wissenschaft ist, welche „nichts als die formalen Regeln alles Denkens . . . ausführlich darlegt und strenge beweiset“ hat sie ihren Erfolg zu verdanken. Indikator für die Universalität der Logik ist die Abstraktion „von allen Objekten der Erkenntnis“, wobei das Denken „a priori oder empirisch sein, einen Ursprung oder Objekt haben, welches es wolle, in unserem Gemüte zufällige oder natürliche Hindernisse antreffen“ kann.

2.1.2 Die Erkenntnisart der Mathematik und Physik

Im folgenden sind die theoretische und die praktische Erkenntnis unterschieden. Die erstere bestimmt den Erkenntnisgegenstand und seinen Begriff, wohingegen die praktische Erkenntnis diesen produziert. Beide Erkenntnisarten enthalten einen „*reinen Teil*“, in dem allein die Vernunft a priori ihr Objekt festlegt. Wissenschaftstheoretisch bedeutet das folgende Unterscheidung⁴:

Mathematik und Physik sind die beiden theoretischen Erkenntnisse der Vernunft, welche ihre Objekte a priori bestimmen sollen, die erstere ganz rein, die zweite wenigstens zum Teil rein, denn aber auch nach Maßgabe anderer Erkenntnisquellen als der der Vernunft.

Den „sicheren Weg“ der Logik ist die Mathematik nicht schon immer gegangen, eher ist es „lange beim Herumtappen“ geblieben. Die „*Revolution*“ hat Thales gebracht. Er hat erkannt, dass man geometrischen Körpern nicht „nachspüren“ muss, sondern dass alles Notwendige aus Definitionen a priori folgt.

Die empirischen Naturwissenschaften haben noch länger gebraucht, ihre Prinzipien zu fassen. Durch die Experimente Galileis „ging allen Naturforschern ein Licht auf. Sie begriffen, daß die Vernunft nur das einsieht, was sie selbst nach ihrem Entwurfe hervorbringt . . .“. Die Vernunft soll die Natur „nötigen, auf ihre Fragen zu antworten“. Mit anderen Worten muss vor jedem Experiment ein Modell stehen. Anderenfalls erscheinen die Ergebnisse zufällig, die Natur würde den Verstand „gleichsam am Leitbande gängeln“. Insbesondere müssen diese Modelle konsistent sein, um auch wirkliche Eigenschaften der Natur festzustellen und sie nicht bloß „anzudichten“. Dieses Prinzip ist die Revolution der Naturwissenschaften und hat nach einem jahrhundertelangen „Herumtappen“ auch ihnen zum „sicheren Gang einer Wissenschaft“ verholfen.

Von Hartmann⁵ teilt die „reine Philosophie“ als „Metaphysik, die nur von den Prinzipien a priori abhängt und über die Grenzen der Natur hinausgeht“ in mehrere Gebiete ein. Diese sind „Ontologie oder Transcendentalphilosophie, rationale Physik, rationale Psychologie und rationale

⁴Man vergleiche diese Einteilung in Objekt und Methode mit [9], S. 11 f.: „Und auch [die Mathematik und Logik] sind keineswegs schon hinreichend gekennzeichnet, wenn man sie lediglich als 'nichtempirische Wissenschaften' bezeichnet. Vielmehr sind sie nichtempirische Wissenschaften von Nichtempirischem.“

⁵Vgl. [17], S. 16 f.

Theologie“. Die „rationale Physik“ wendet die „Transcendentalphilosophie“ auf „Körper“ an. Ihr Objekt ist also „ein Gegenstand der Erfahrung, und nur Erkenntnis von ihm ist durch reine Vernunftbegriffe erlangt“. Man beachte, dass der Begriff der Physik hier nicht dem heutigen Verständnis entspricht. Er ist aber hilfreich, um Kants Naturphilosophie zu untersuchen. Sie lehnt sich an die damals zeitgenössische Physik, nämlich die klassische Mechanik Newtons. Die „Transcendentalphilosophie oder Ontologie“ der *Kritik* hingegen nehme ihren Gegenstand „nicht aus der Erfahrung sondern aus reiner Vernunft“. Die Metaphysik sei „Vernunftkenntnis aus blossen Begriffen“ und „diskursive Erkenntnis a priori“. Sie behandle sowohl „die qualitativen als auch die quantitativen Begriffe diskursiv“. Im Unterschied zur Metaphysik entstehe die Mathematik aus der „anschaulichen Konstruktion der Begriffe . . . a priori“. Dies geschehe auf rein „quantitative Art“. Diese Sichtweise ist nach von Hartmann die Voraussetzung der gesamten *Kritik*:

Es steht für Kant ausser Zweifel, dass einerseits beide Wissenschaften als wirkliche Wissenschaften von strenger Exaktheit und Notwendigkeit existieren, also keine blossen Scheinwissenschaften sind, und, dass sie andererseits Erkenntnisse a priori sind, die keiner Erfahrung bedürfen. Einen Beweis für beide Voraussetzungen giebt er nicht, offenbar weil er ihn für überflüssig und die beiden Voraussetzungen für „unwidersprechlich“ hält.

2.1.3 Die Kopernikanische Wende in der Metaphysik

Die Metaphysik liefert eine „ganz isolierte“ apriorische, wenn auch spekulative Erkenntnis. Ihre Objekte sind bloße Begriffe. Darin liegt ein Unterschied zur Mathematik, welche diese Begriffe auf die Anschauung anwendet. Auch hat die Metaphysik den Gang einer sicheren Wissenschaft noch nicht getan: „Denn in ihr gerät die Vernunft kontinuierlich in Stecken, selbst wenn sie diejenigen Gesetze, welche die gemeinste Erfahrung bestätigt (wie sie sich anmaßt), a priori einsehen will.“ Bis dato haben die Gegenstände über die Erkenntnis dominiert. Diese Prämisse verhindert die Erkenntnisfindung durch Begriffe a priori. Kant schlägt den neuen Grundsatz vor, „die Gegenstände müssen sich nach unserem Erkenntnis richten, welches so schon besser mit der verlangten Möglichkeit einer Erkenntnis derselben a priori zusammenstimmt, die über Gegenstände, ehe sie uns gegeben werden, etwas festsetzen soll.“ Diese Feststellung wird als die Kopernikanische Wende bezeichnet, denn es ist

hiermit eben so, als mit den ersten Gedanken des *Kopernikus* bewandt, der, nachdem es mit der Erklärung der Himmelsbewegungen nicht gut fort wollte, wenn er annahm, das ganze Sternheer drehe sich um den Zuschauer, versuchte, ob es nicht besser gelingen möchte, wenn er den Zuschauer sich drehen, und dagegen die Sterne in Ruhe ließ.

Wenn sich der Gegenstand „als Objekt der Sinne“ nach der „Beschaffenheit unseres Anschauungsvermögens“ richtet, kann man sich apriorische Erkenntnis „sehr wohl“ vorstellen. Man muss diese Anschauungen aber stets durch Begriffe identifizieren. Jedes Objekt und jegliche Erfahrung hat sich nach diesen Begriffen zu richten. Insbesondere die nichtempirische Erkenntnis profitiert davon:

Was Gegenstände betrifft, so fern sie bloß durch Vernunft und zwar notwendig gedacht, die aber . . . gar nicht in der Erfahrung gegeben werden können, so werden die Versuche, sie zu denken . . . hernach einen herrlichen Proberstein desjenigen abgeben,

was wir als die veränderte Methode der Denkungsart annehmen, daß wir nämlich von den Dingen nur das a priori erkennen, was wir selbst in sie legen.

Dadurch wird es möglich, die apriorischen Naturgesetze als Erfahrungsgegenstand zu behandeln. Das steigert die wissenschaftliche Sicherheit der Metaphysik.

2.1.4 Die *Kritik der reinen Vernunft* als „Traktat der Methode“

Kant lenkt ein, dass man auf diese Art zwar nie über die Grenze potentieller Erfahrung hinauskommen kann. Doch hierin liegt gerade das „Experiment“ mittels der Vernunft a priori, „daß sie nämlich nur auf Erscheinungen gehe, die Sache an sich selbst dagegen zwar als für sich wirklich, aber von uns unerkannt, liegen lasse“. Das ist ein Ausblick auf das Modell des Dinges an sich. Das notwendig apriorisch fassbare „*Unbedingte*“ macht notwendig das rationale Wesen dieser Dinge an sich aus. Es folgt ein Widerspruchsbeweis. Angenommen, man ginge davon aus, unsere empirische Erkenntnis richtete sich nach den Gegenständen als Dingen an sich. Dann könnte das Unbedingte „*ohne Widerspruch gar nicht gedacht*“ werden. Dieser Widerspruch ist aufgehoben, wenn sich die Gegenstände als Erscheinungen nach unserer Vorstellung der Dinge an sich richten. Sodann schließt Kant, dass die „spekulative Vernunft“ das Unbedingte der Dinge an sich nicht fassen kann. Die Metaphysik ist ein „Traktat von der Methode, nicht ein System der Wissenschaft selbst“. Mit besagter Methode kann man „den ganzen Vorriß zu einem System der Metaphysik verzeichnen“, denn einerseits bedient sich das „Subjekt“ auf dieser Ebene der reinen Erkenntnis nur seiner selbst und aus sich heraus. Andererseits ähnelt die Metaphysik einem „organisierten Körper“. Jedes darin vorhandene Prinzip ist um des Willens aller anderen vorhanden. Damit stehen diese in einer „*durchgängigen*“ Beziehung zur Methode der Metaphysik. Sofern die *Kritik* die Metaphysik „in den sicheren Gang der Wissenschaft“ bringen kann, wird sie

das ganze Feld der für sie gehörigen Erkenntnisse völlig befassen und also ihr Werk vollenden und für die Nachwelt, als einen nie zu vermehrenden Hauptstuhl, zum Gebrauche niederlegen kann, weil sie es bloß mit Prinzipien und den Einschränkungen ihres Gebrauchs zu tun hat, welche durch jene selbst bestimmt werden.

Der vornehmliche Nutzen der Kritik ist „*negativ*“ im Sinne einer Verneinung. Schließlich bestimmt sie die Empirie als Erfahrungsgrenze der reinen Vernunft. Doch gerade das ist „*positiv*“. Ein Streben über die empirische Grenze hinaus betrachtet Kant eher als eine „*Verengung*“, denn als eine „*Erweiterung*“. Erkenntnis liegt also nicht in den Dingen an sich, sondern nur ihren Entsprechungen als Objekte unserer Anschauung, den Erscheinungen, wie Kant sie nennt. Entsprechend sind Raum und Zeit nur Erscheinungen, die wir an sich nicht erkennen, wohl aber denken können. Zur Begründung bedient sich Kant abermals der Reductio ad absurdum: „Denn sonst würde der ungerimte Satz daraus folgen, daß Erscheinung ohne etwas wäre, was da erscheint.“

2.1.5 Das Fehlen der Moralphilosophie in der *Kritik der reinen Vernunft*

Die Verengung besteht darin, dass sie den moralisch notwendigen, praktischen Gebrauch der reinen Vernunft bedroht. Die praktische Vernunft ist aber aufgrund der Sinnlichkeitsgrenze davor geschützt:

Diesem Dienste der Kritik den positiven Nutzen abzusprechen, wäre eben so viel, als sagen, daß Polizei keinen positiven Nutzen schaffe, weil ihr Hauptgeschäfte doch nur ist, der Gewalttätigkeit, welche Bürger von Bürgern zu besorgen haben, einen Riegel vorzuschieben, damit ein jeder seine Angelegenheit ruhig und sicher treiben könne.

Von Hartmann schreibt⁶ über die *Kritik* im Kontext moralphilosophischer Untersuchungen in der *Kritik der praktischen Vernunft* und der *Kritik der reinen Urteilskraft*:

Die Kritik ist also negativ, indem sie den falschen Gebrauch des Verstandes einschränkt, sie wirkt aber positiv nützlich, indem sie eben dadurch die moralischen Ideen als Konsequenzen des praktischen Vernunftgebrauches sicherstellt . . .

Die transcendente Dialektik, oder der negative Teil der Kr. d. r. V. dient also eigentlich nur als Mittel für die Kr. d. praktischen Vernunft, und die transcendente Analytik oder der positive Teil der Kr. d. r. V. dient nur als Mittel zur Ausführung der negativen. Die positive Metaphysik Kants steckt erst in der Kr. d. pr. V., und die Kr. d. r. V. ist nur eine unentbehrliche Vorbereitung für dieses, indem sie ihre Aufgabe erfüllt, die Grenzen des Verstandesgebrauches zu bestimmen.

Die „zweite Periode der Kantschen Metaphysik (1769 bis 1776)“⁷ betrachte „die Moral von aller Metaphysik unabhängig“.

2.1.6 Die Charakterisierung apriorischer Urteile durch ihre Notwendigkeit

Die Einleitung der *Kritik* gliedert sich in sieben Abschnitte. Hier sind die Thesen formuliert, aus denen die transzendentalen Hauptfragen hervorgehen. Zur Unterscheidung der reinen und empirischen Erkenntnis⁸ vertritt Kant die Ansicht,

daß alle unsere Erkenntnis mit der Erfahrung anfangt, daran ist gar kein Zweifel; denn wodurch sollte das Erkenntnisvermögen sonst durch zur Ausübung erweckt werden, geschähe es nicht durch Gegenstände, die unsere Sinne rühren und teils von selbst Vorstellungen bewirken, teils unsere Verstandestätigkeit in Bewegung bringen, diese zu vergleichen, sie zu verknüpfen oder zu trennen, und so den rohen Stoff sinnlicher Eindrücke zu einer Erkenntnis der Gegenstände zu verarbeiten, die Erfahrung heißt?

Es ist zu differenzieren. Nicht in einem temporalen Sinne geht die Erkenntnis notwendigerweise der Erfahrung voraus. Die begründende Ursache der empirischen Erkenntnis kann eine Kombination sinnlicher Eindrücke und dem eigenen intrinsischen Erkenntnisvermögen sein. Es ist also die nichttriviale Frage zu untersuchen, ob es Erkenntnisse gibt, die einerseits unabhängig von aller Erfahrung und allen Sinnesindrücken sind und andererseits als deren Ursache fungieren können. Auch Tetens⁹ betont, das Verhältnis zwischen Wahrnehmungen und Aussagen sei nicht in einem zeitlichen Sinne misszuverstehen: „Es geht vielmehr um die Rolle der Wahrnehmungen für die Begründung der Aussagen.“ Im folgenden nennt man diese „*Erkenntnisse a priori* [im Vorhinein], und unterscheidet sie von den *empirischen*, die ihre Quellen a posteriori [im Nachhinein], nämlich in der Erfahrung, haben“. Diese Definition wird dahingehend verschärft, dass wir

unter Erkenntnissen a priori nicht solche verstehen, die von dieser oder jener, sondern die schlechterdings von aller Erfahrung unabhängig stattfinden. Ihnen sind empirische Erkenntnisse, oder solche, die nur a posteriori, d.i. durch Erfahrung, möglich sind, entgegengesetzt. Von den Erkenntnissen a priori heißen aber diejenigen rein, denen gar nichts Empirisches beigemischt ist. So ist z.B. der Satz: eine jede Veränderung

⁶[17], S. 76

⁷Vgl. ebd., S. 15

⁸Vgl. [5], S. 458 ff.

⁹Vgl. [14], S. 25

hat ihre Ursache, ein Satz a priori, allein nicht rein, weil Veränderung ein Begriff ist, der nur aus der Erfahrung gezogen werden kann.

Von Hartmann spricht von „spielenden (analytischen)“ und „belehrenden (synthetischen)“ Urteilen. Kant habe die Unterscheidung von Locke übernommen.¹⁰

Mit diesen Definitionen sind wir gemäß des Titels des nächsten Abschnittes „im Besitze gewisser Erkenntnisse a priori, und selbst der gemeine Verstand ist niemals ohne solche“¹¹. Die apriorischen Erkenntnisse werden durch ihre Notwendigkeit und Allgemeinheit charakterisiert. Zwar lehrt die Erfahrung, dass uns etwas in einer gewissen Art beschaffen erscheinen kann, aber nicht, inwiefern dies wirklich ist:

Findet sich also erstlich ein Satz, der zugleich mit seiner Notwendigkeit gedacht wird, so ist er eine Aussage a priori; . . . Zweitens: Erfahrung gibt niemals ihren Urteilen wahre oder strenge, sondern nur angenommene und komparative Allgemeinheit (durch Induktion), so daß es eigentlich heißen muß: so viel wir bisher wahrgenommen haben, findet sich von dieser oder jener Regel keine Ausnahme. Wird also ein Urteil in strenger Allgemeinheit gedacht, d.i. so, daß gar keine Ausnahme als möglich gestattet wird, so ist es nicht von der Erfahrung abgeleitet, sondern schlechterdings a priori gültig . . . Notwendigkeit und strenge Allgemeinheit sind also sichere Kennzeichen einer Erkenntnis a priori, und gehören auch unzertrennlich zu einander.

Daraus folgt, dass eine empirischen Aussage nicht notwendigerweise wahr sind. Ist eine Aussage aber notwendigerweise wahr, dann ist sie nicht empirisch, sondern apriorisch. Es besteht also folgende Äquivalenz: Eine Aussage ist genau dann notwendigerweise wahr, wenn sie a priori wahr ist. Dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn sie durch Wahrnehmung weder verifiziert noch falsifiziert werden kann. Tetens betont, man dürfe dies nicht verwechseln mit der prädikatenlogischen Einteilung in All- und Existenzaussagen.¹² Der Satz „Wenn Gerhard Schröder Junggeselle ist, dann ist er unverheiratet“ sei zwar apriorisch, aber keine Allaussage im Sinne der Logik. Insbesondere sind Aussagen über transzendente Bedingungen der Erfahrung apriorisch. Gemäß des Zitates zur Eröffnung dieses Kapitels nennt Kant hier die Mathematik in ihrer Gesamtheit eine apriorische Wissenschaft. Ein Beispiel für apriorische Aussagen im „Verstandesgebrauche“ stellt der Satz dar,

daß alle Veränderung eine Ursache haben müsse . . . ja in dem letzteren enthält selbst der Begriff einer Ursache so offenbar den Begriff einer Notwendigkeit der Verknüpfung mit einer Wirkung und einer strengen Allgemeinheit der Regel, daß er gänzlich verloren gehen würde, wenn man ihn . . . [aus sinnlicher Wahrnehmung und empirischer Gewohnheit] ableiten wollte . . . Denn wo wollte selbst Erfahrung ihre Gewißheit hernehmen, wenn alle Regeln, nach denen sie fortgeht, immer wieder empirisch, mithin zufällig wären; daher man diese schwerlich für erste Grundsätze gelten lassen kann.

Kant zeigt, dass nicht nur einige Urteile, sondern auch einige Begriffe dem Apriorischen entspringen. Um dies einzusehen, stelle man sich einen empirischen Körper ohne alle sinnlichen Attribute vor („die Farbe, die Härte oder Weiche, die Schwere, selbst die Undurchdringlichkeit“). Es bleibt stets der von diesem Körper eingenommene Raum übrig, „und den könnt ihr nicht weglassen“.

¹⁰Vgl. [17], S. 3

¹¹Vgl. [5], S. 461 ff.

¹²Vgl. [14], S. 39

Damit gibt er einen Ausblick auf die Apriorität der transzendentalen Ästhetik. Verallgemeinert gesprochen verbleibt nach einer solchen Reduktion stets die „*Substanz*“ des Objektes. Man muss aufgrund der „Notwendigkeit“ eingestehen, dass der Begriff dem „Erkenntnisvermögen a priori“ entspringt.

2.1.7 Der Anspruch an die Metaphysik

Der Metaphysik kommt in diesem Abschnitt ergänzend zur Philosophie die Rolle zu, „die Möglichkeit, die Prinzipien und den Umfang aller Erkenntnisse a priori [zu bestimmen]“¹³. Es existieren Begriffe ohne Gegenstand in der menschlichen Wahrnehmung. Daher soll sich die Metaphysik selbst über die Grenze aller möglichen menschlichen Erfahrung hinwegsetzen. Das ist „viel erhabener . . . als alles, was der Verstand im Felde der Erscheinungen lernen kann“. Die außersinnlichen Entitäten sind Gott, Freiheit und Unsterblichkeit. Die Metaphysik wird definiert als diejenige Wissenschaft, deren „Endabsicht“ die „*Auflösung*“ dieser Begriffe ist. Sie ist aber dahingehend „*dogmatisch*“, dass sie ihr eigenes Vermögen zu dieser Aufgabe nicht überprüft, sondern „zu einer so großen Unternehmung zuversichtlich die Ausführung übernimmt“. Gegen Ende der Einleitung wird dieses Problem wieder aufgegriffen und dient der Begründung einer Kritik der reinen Vernunft.

Die Mathematik gibt uns „ein glänzendes Beispiel, wie weit wir es, unabhängig von der Erfahrung, in der Erkenntnis a priori bringen können“. Der Unterschied zur Metaphysik liegt darin, dass die mathematischen Objekte notwendigerweise der Anschauung zugänglich sind. Mathematische Anschauung besitzt dennoch einen hohen Abstraktionsgrad. Sie ist einerseits apriorisch, andererseits aber auch kein „bloßer reiner Begriff“:

Durch einen solchen Beweis von der Macht der Vernunft eingenommen, sieht der Trieb zur Erweiterung keine Grenzen. Die leichte Taube, indem sie im freien Fluge die Luft teilt, deren Widerstand sie fühlt, könnte die Vorstellung fassen, daß es ihr im luftleeren Raum noch viel besser gelingen werde. Eben so verließ Plato die Sinnenwelt, weil sie dem Verstande so enge Schranken setzt, und wagte sich jenseit derselben, auf den Flügeln der Ideen, in den leeren Raum des reinen Verstandes. Er bemerkte nicht, daß er durch seine Bemühungen keinen Weg gewönne, denn er hatte keinen Widerhalt, gleichsam zur Unterlage, worauf er sich steifen, und woran er seine Kräfte anwenden konnte, um den Verstand von der Stelle zu bringen.

2.1.8 Die Urteile der reinen Vernunft

Das vermeintliche Dilemma Platons löst Kant durch den „Unterschiede analytischer und synthetischer Urteile“¹⁴. Analytische Urteile sind zergliedernd. Sie liefern Erkenntnisse über ein Objekt, welche schon in dessen Definition enthalten sind. Obgleich die Vernunft also keine neuen Prädikate ergänzt, ist diese Art der Erkenntnis durchaus befriedigend, da sie „doch wenigstens der Form nach neuen Einsichten gleich geschätzt“ wird. Man nennt diese auch Erläuterungsurteile. Unter synthetischen Urteilen versteht Kant solche Erkenntnisse, welche eine Beziehung zwischen einem Objekt und einem Prädikat herstellen. Das Prädikat steht nicht per definitionem mit diesem Objekt in Verbindung. Demnach heißen sie auch Erweiterungsurteile. Das Urteil „alle Körper sind ausgedehnt“ ist also analytisch, wohingegen „alle Körper sind schwer“ eine synthetische Feststellung ist. Daraus folgert Kant:

¹³[5], S. 465 ff.

¹⁴Ebd., S. 470 ff.

Erfahrungsurteile, als solche, sind insgesamt synthetisch. Denn es wäre ungereimt, ein analytisches Urteil auf Erfahrung zu gründen, weil ich aus meinem Begriffe gar nicht hinausgehen darf, um das Urteil abzufassen, und also kein Zeugnis der Erfahrung dazu nötig habe. Daß ein Körper ausgedehnt sei, ist ein Satz, der a priori feststeht, und kein Erfahrungsurteil.

Die Notwendigkeit der Ausgedehntheit eines Körpers steht also vor aller Erfahrung. Ob ein Körper schwer¹⁵ sei, lässt sich nicht durch die Definition entscheiden. Das Experiment, ob er schwer sei, ist vonnöten und das Urteil über seine Masse synthetisch.

Die Erfahrung ist als „synthetische Verbindung der Anschauungen“ beschrieben. Gewisse synthetische Sätze sind frei von Empirie. Beispielsweise benötigt man „synthetische Urteile a priori“, um das Kausalitätsprinzip zu formulieren: „Alles, was geschieht, hat seine Ursache.“ Über den Begriff des Geschehnisses lassen sich analytische Urteile bilden. Der Begriff seiner Ursache aber „zeigt etwas von dem, was geschieht, Verschiedenes an“, muss also an einer Synthesis beteiligt sein:

Wie komme ich denn dazu, von dem, was überhaupt geschieht, etwas davon ganz Verschiedenes zu sagen, und den Begriff der Ursache, ob zwar in jenem nicht enthalten, dennoch, als dazu und sogar notwendig gehörig, zu erkennen.

Man kann die Erfahrung ausschließen, denn aufgrund seiner notwendigen Allgemeinheit muss das Kausalitätsprinzip apriorisch sein. Die oben erwähnte „Endabsicht“ der reinen Vernunft liegt in derart synthetischen Urteilen a priori,

denn die analytischen sind zwar höchst wichtig und nötig, aber nur, um zu derjenigen Deutlichkeit der Begriffe zu gelangen, die zu einer sicheren und ausgebreiteten Synthesis, als zu einem wirklich neuen Erwerb, erforderlich ist.

2.1.9 Das Prinzip synthetischer, apriorischer Urteile in der Mathematik, Physik und Metaphysik

Diese synthetischen Urteile a priori sind in allen „theoretischen Wissenschaften der Vernunft ... als Prinzipien enthalten“¹⁶. Kant formuliert drei Thesen über jeweils eine der anfangs erwähnten Wissenschaften und gibt damit einen Ausblick auf die Gliederung der transzendentalen Elementarlehre. Gegenstand der transzendentalen Ästhetik ist die Mathematik. Die transzendente Analytik zählt zur transzendentalen Logik und behandelt die Physik.

Der erste Lehrsatz besagt, alle mathematischen Urteile sind synthetisch. Den „Zergliederern“ ist diese Tatsache anscheinend entgangen, „ob er gleich unwidersprechlich gewiß und in der Folge sehr wichtig ist“. Man hat aus der Tatsache, dass sich jeder mathematische Satz mit dem Satz des Widerspruchs beweisen lässt, fälschlicherweise geschlossen, dass jegliche mathematische Grundlage eine Folge dieses Satzes sei. Der Satz des Widerspruchs dient zwar zur Verifikation eines mathematischen Schlusses, aber ein solcher Schluss muss seinerseits ein Schluss aus einem anderen synthetischen Urteil sein. Um sicherzugehen, im folgenden nur notwendig apriorische Urteile zu behandeln, beschränkt sich Kant auf die „*reine Mathematik*“.

¹⁵Hier ist „schwer“ offensichtlich im Sinne von verhältnismäßig hoher Masse gemeint. Dass ein Körper stets „schwer“ dahingehend ist, dass er überhaupt Masse besitzt, ist ein analytisches Urteil. Es zählt zu seinen definierenden Eigenschaften.

¹⁶Vgl. [5], S. 475 ff.

Er betrachtet das arithmetische Urteil „ $7 + 5 = 12$ “, um die Analytizität mathematischer Sätze zu widerlegen. Man kann zunächst denken, dass dieser Satz in der Tat analytisch sei, „der aus dem Begriffe einer Summe von Sieben und Fünf nach dem Satze des Widerspruches erfolge“. Jedoch beinhaltet der Ausdruck „ $7 + 5$ “ lediglich die „Vereinigung beider Zahlen in eine einzige wodurch ganz und gar nicht gedacht wird, welches diese einzige Zahl sei, die beide zusammenfaßt“. Das Gleichheitszeichen bedeutet also nach dieser These nicht nur formale Identität, sondern ein neues Urteil:

Der Begriff von Zwölf ist keinesweges dadurch schon gedacht, daß ich mir bloß jene Vereinigung von Sieben und Fünf denke, und, ich mag meinen Begriff von einer solchen möglichen Summe noch so lange zergliedern, so werde ich doch darin die Zwölf nicht antreffen.

Als Anschauung können die eigenen fünf Finger einer Hand oder aber fünf Punkte dienen. Diesen sind die „Einheiten“ hinzuzufügen, bis man die 7 erhält. Man benötigt eine Anschauung der 7 zum ihrem leeren Begriff. Dass dies insgesamt 12 ergibt, ist der nächste Schritt, nämlich das vollendete synthetische Urteil a priori über diesen bestimmten Satz der Arithmetik. Laut Kant wird bei größeren Zahlen das Anschauungsprinzip sogar noch deutlicher. Frege benutzt in seinen *Grundlagen der Arithmetik* gerade dieses Argument, um ihn zu widerlegen.

Auch die „reine Geometrie“ ist in ihren Folgerungen synthetisch, wie etwa der Satz zeigt, dass „die gerade Linie zwischen zweien Punkten die kürzeste sei“. Der Begriff der Geraden enthält „nichts von Größe, sondern nur eine Qualität“, mithin nicht den Begriff des Kürzesten. Dieser wiederum kann nur durch Anschauung vermittelt werden und genau die Anschauung vermittelt eine Synthese. Daneben sind einige Sätze in der Geometrie auch analytisch. Aber diese haben lediglich methodische Relevanz, um mathematische Implikationsketten zu ermöglichen: „z.B. $a = a$, das Ganze ist sich selber gleich, oder $(a + b) > a$, d.i. das Ganze ist größer als sein Teil“. Solche evidenten Urteile sind zwar aus Begriffen gebildet, jedoch nur akzeptiert, weil sie sich anschaulich verifizieren lassen:

Wir *sollen* nämlich zu einem gegebenen Begriffe ein gewisses Prädikat hinzudenken, und diese Notwendigkeit haftet schon an den Begriffen. Aber die Frage ist nicht, was wir zu dem gegebenen Begriffe hinzu *denken sollen*, sondern was wir *wirklich* in ihm, obzwar nur dunkel, *denken*, und da zeigt sich, daß das Prädikat jenen Begriffen zwar notwendig, aber nicht als im Begriffe selbst gedacht, sondern mittelst einer Anschauung, die zu dem Begriffe hinzukommen muß, anhängt.

Die „*Naturwissenschaft (physica)*“ enthält ebensolche „synthetische[n] Urteile a priori als Prinzipien in sich“. In der heutigen Terminologie dienen die Unveränderlichkeit der Masse und die Erhaltungssätze der klassischen Physik als Beispiele. Ähnlich dem Körper enthält der Begriff der Materie nicht bereits ihre „Beharrlichkeit“, sondern bloß ihre Anwesenheit im Raum. Man muss über ihn hinaus gehen, um „etwas etwas a priori zu ihm hinzuzudenken“, also ein synthetisches Urteil fällen. Eine Erläuterung, warum dies a priori ist und, wie der „Raum“ in allen Begriffen der Physik analytisch enthalten sein kann, folgt an dieser Stelle noch nicht, sondern erst in der transzendentalen Ästhetik.

Vermöge der Metaphysik soll man nicht nur synthetische Erkenntnisse a priori erlangen, sondern Urteile über jegliche Erfahrung hinaus, „z.B. in dem Satze: die Welt muß einen ersten Anfang haben, u.a.m., und so besteht Metaphysik wenigstens ihrem Zwecke nach aus lauter synthetischen Sätzen a priori“.

2.1.10 Die reine Vernunft und ihre Kritik

Die „allgemeine Aufgabe der reinen Vernunft“¹⁷ ist in der Frage enthalten, wie synthetische Urteile a priori möglich sind. Der Grund für das Wanken der Metaphysik ist einzig, dass man sich dieser Frage nicht bewusst war und keine Unterscheidung zwischen den Urteilsarten getroffen hat. Der Erfolg der Metaphysik hängt ab von der Antwort auf diese Frage, oder zumindest von einer Beurteilung ihrer Entscheidbarkeit. Außerdem folgen daraus die Fragen, wie reine Mathematik und reine Naturwissenschaft möglich sind. Die Betonung liegt hierbei auf der Methode; denn, dass sie möglich sind, ist durch ihre Existenz bewiesen. Mit der Metaphysik verhält es sich anders. Nicht nur ihr methodischer Fortgang, sondern auch ihre Existenz als Wissenschaft ist anzuzweifeln. Man kann sich ihr zunächst nur als einer „Naturanlage (metaphysica naturalis)“ sicher sein, gegeben durch die „Unaufhaltsamkeit“ der menschlichen Vernunft.

Es ist zu fragen, wie Metaphysik als Naturanlage möglich ist, mithin, wie der Zusammenhang zwischen der reinen Vernunft und der „allgemeinen Menschenvernunft“ aussieht. Aufgrund der Widersprüche, die bei außersinnlichen Fragen zwangsweise auftreten, muss es

möglich sein, mit ihr es zur Gewißheit zu bringen, entweder im Wissen oder Nicht-Wissen der Gegenstände, d.i. entweder der Entscheidung über die Gegenstände ihrer Fragen, oder über das Vermögen und Unvermögen der Vernunft, in Ansehung ihrer etwas zu urteilen, also entweder unsere reine Vernunft mit Zuverlässigkeit zu erweitern, oder ihr bestimmte und sichere Schranken zu setzen.

Es geht auch darum, wie Metaphysik als Wissenschaft möglich ist. Die dogmatische Anwendung der Metaphysik führt auf „grundlose Behauptungen“. Deswegen ist eine Kritik der reinen Vernunft erforderlich. Da die Metaphysik sich selbst zum Objekt hat, kann sie nicht von „abschreckender Weitläufigkeit“ sein. Wenn also die Grenze aller Empirie bekannt ist, so hat man es auch leicht, den Umfang ihrer Untersuchungen über die Erfahrung hinaus zu bestimmen. Der dogmatische Gebrauch nutzt die Metaphysik nur zum Gewinn analytischer Erkenntnisse. Diese können aber lediglich als Mittel synthetischer Urteile a priori dienen.

Neben dem Inhalt eines Begriffes muss man auch seine Konstruktion erkennen. Erst dann kann man die Tragweite der Metaphysik vergleichen mit den Gegenständen „aller Erkenntnis überhaupt“. Man soll sich

durch die Schwierigkeit innerlich und den Widerstand äußerlich nicht abhalten . . . lassen, eine der menschlichen Vernunft unentbehrliche Wissenschaft, von der man wohl jeden hervorgesprochenen Stamm abhauen, die Wurzel aber nicht ausrotten kann, durch eine andere, der bisherigen ganz entgegengesetzte, Behandlung endlich einmal zu einem gedeihlichen und fruchtbaren Wuchse zu befördern.

2.1.11 Aufbau der Transzendentalphilosophie

Die Einleitung schließt mit dem Abschnitt über die „Idee und Einteilung einer besonderen Wissenschaft, unter dem Namen einer Kritik der reinen Vernunft“¹⁸. Die menschliche Vernunft wird definiert als „das Vermögen, welches die *Prinzipien* der Erkenntnis a priori an die Hand gibt. Daher ist reine Vernunft diejenige, welche die Prinzipien, etwas schlechthin a priori zu erkennen, enthält“. Der Nutzen einer „*Kritik*“ der reinen Vernunft ist negativ. Sie dient „nicht zur Erweiterung, sondern nur zur Läuterung unserer Vernunft [und hält] sie von Irrtümern frei . . . welches

¹⁷[5], S. 480 ff.

¹⁸Vgl. ebd., S. 486 ff.

schon sehr viel gewonnen ist“. Unter transzendentaler Erkenntnis versteht man jede Erkenntnis über die apriorische Urteilsart der Gegenstände. Die transzendentalen Erkenntnisse machen die Transzendentalphilosophie aus. Für die Hauptfragen ist diese Transzendentalphilosophie zu umfassend, da sie auch die gesamte Analytik der Begriffe beinhaltet. Kant beschränkt sich betont auf ihren kritischen Teil.

2.2 Die transzendente Ästhetik in der transzendentalen Elementarlehre

*Zeit und Raum sind demnach zwei Erkenntnisquellen, aus denen a priori verschiedene synthetische Erkenntnisse geschöpft werden können, wie vornehmlich die reine Mathematik in Ansehung der Erkenntnisse vom Raume und dessen Verhältnissen ein glänzendes Beispiel gibt.*¹⁹

Immanuel Kant

2.2.1 Die Isolation der Sinnlichkeit

Für jegliche gegenstandsbezogene Erkenntnis ist die Anschauung notwendig. Die Sinnlichkeit hingegen gibt unserem Verstand diese Gegenstände und liefert Anschauungen. Der Verstand denkt sie und schafft Begriffe. Jedes Denken muss sich „geradezu (directe), oder im Umschweife (indirecte) . . . zuletzt auf Anschauungen, mithin, bei uns, auf Sinnlichkeit beziehen, weil uns auf andere Weise kein Gegenstand gegeben werden kann“²⁰. Eine Empfindung ist eine Wirkung eines Gegenstandes auf die Vorstellungsfähigkeit. Empirische Erkenntnisse lassen sich damit als die Erkenntnis von Gegenständen durch Empfindung definieren. Ist ein solcher Gegenstand unbestimmt, spricht man von einer Erscheinung. Ein Analogon zur Empfindung von Gegenständen ist die sogenannte Materie von Erscheinungen. Die Ordnung in „gewissen Verhältnissen“ nennt man eine Form der Erscheinung. Folglich ist die Menge aller Erscheinungen nur a posteriori zu fassen. Die Ordnung kann selbst keine Empfindung sein und muss „im Gemüte a priori bereit liegen“. Von Hartmann zufolge ist die Einteilung in eine äußere und innere Sinnlichkeit ebenso wie die Unterscheidung der Urteilsarten von Locke übernommen.²¹

Erkenntnis, die sich nicht auf Empfindungen stützt, nennt Kant reine Erkenntnis. Ebenso kann sich jede „reine Form sinnlicher Anschauungen“ nur im „Gemüte a priori“ ansiedeln. Diese Ordnung durch die Form hat zufolge, dass „alles Mannigfaltige der Erscheinungen in gewissen Verhältnissen angeschauet wird“. Das versteht man unter der reinen Anschauung. Die transzendente Ästhetik ist die Wissenschaft aller „Prinzipien der Sinnlichkeit a priori . . . im Gegensatz derjenigen, welche die Prinzipien des reinen Denkens enthält, und transzendente Logik genannt wird“. Der Verstand setzt durch seine Begriffe empirische Anschauungen. Die transzendente Ästhetik „isoliert“ sie von der Sinnlichkeit, „damit nichts als empirische Anschauung übrig bleibe“. Diese wird um jegliche Empfindung reduziert, sodass nur die reine Anschauung und die Form der Erscheinungen übrig bleiben. Man erhält die Erkenntnisse der Sinnlichkeit a priori.

¹⁹[5], S. 516

²⁰Vgl. ebd., S. 492 ff.

²¹Vgl. [17], S. 3

2.2.2 Höffe zur Dialektik von Rationalismus und Empirismus in der transzendentalen Ästhetik

Höffe betont²² Kants Aufwertung der Sinnlichkeit als wesentlich neuen Zug der Philosophie gleichsam als „Einspruch gegen die Diskriminierung der Sinnlichkeit“:

Sie gilt nicht länger als eine undeutliche, defizitäre Form des Intellektuellen, sondern als eine eigenständige, überdies unverzichtbare Erkenntnisquelle . . . Und diese Gleichberechtigung befreit sie von der weitverbreiteten kognitiven Unterordnung unter den Verstand . . . Daß die Erkenntnis des Denkens bedarf, ist seit der Antike anerkannt; daß aber, wie der Ausdruck „abzweckt“ sagt, das Denken letztlich im Dienst der Anschauung steht, ist neu. Trotzdem wird es selbst in der Kant-Interpretation selten beachtet.

Auch beschreibt er die Ästhetik als eine „Überwindung des Gegensatzes von Empirismus und Rationalismus“. Sie weise „jeden Exklusivanspruch zurück, verbindet also Legimitation mit Limitation“. Dies stehe im Gegensatz zu Leibniz und Locke. Ersterer habe die Erscheinungen mit dem reinen Verstand fassen wollen, letzterer den Verstand mit den bloßen Sinnen. Allerdings spreche Kant „durchaus unklar“ vom „in Analogie einer Ursache“ vorgestellten Unbekannten, welches statt des Subjektes den „[rohen] Stoff sinnlicher Eindrücke“ erzeuge. Für eine starke Form des Rationalismus spreche die „Unverzichtbarkeit der Sinnlichkeit“. Abgeschwächt werde dieser durch die Tatsache, dass „reale Erkenntnis an empirische Sinnlichkeit, die Empfindung gebunden ist“. Die Sinnlichkeit müsse aber durch Begriffe erweitert werden, was für einen starken Empirismus spreche. Da jedoch sowohl Sinnlichkeit und Verstand „apriorische Elemente enthalten“, müsse man wiederum diesen Rationalismus als abgeschwächt betrachten. In der Einleitung zur transzendentalen Logik heißt es prägnant:

Ohne Sinnlichkeit würde uns kein Gegenstand gegeben, und ohne Verstand keiner gedacht werden. Gedanken ohne Inhalt sind leer, Anschauungen ohne Begriffe sind blind.²³

Revolutionär sei es, die Anschauung mit ihren Formen, dem Raum und der Zeit, als Voraussetzung der Mathematik zu sehen. Die Apriorität von Raum und Zeit „spricht gegen den Empirismus“.

Der bereits zitierte Widerspruch zu Platon ist nach Höffe eine „(unausgesprochene) Kritik an Platons Höhlengleichnis“. Die Sinnlichkeit sei nicht etwa ein Schatten und verhindere somit die Erkenntnis, sondern mache die Erkenntnis erst möglich. Sie könne also keine „Gefangenschaft“ sein. Die Relevanz der Anschauung bestimme die „kognitive Endlichkeit“ des Menschen, „von der eine Befreiung weder möglich noch nötig“ sei.

2.2.3 Die metaphysischen und transzendentalen Erörterungen

Die zwei „reine[n] Formen sinnlicher Anschauung“ sind der Raum und die Zeit. Ihnen fällt jeweils einer der beiden Hauptabschnitte der transzendentalen Ästhetik zu. In den Hauptabschnitten finden sich je eine metaphysische Erörterung und eine transzendente Erörterung zu Raum und Zeit. Eine Erörterung²⁴ ist eine „deutliche (wenn gleich nicht ausführliche) Vorstellung dessen, was

²²Vgl. [3], S. 82 ff.

²³[5], S. 536

²⁴Vgl. ebd., S. 497

zu einem Begriffe gehört“. Sie ist metaphysisch, wenn ihr Gegenstand Begriffe a priori gibt. Die transzendente Erörterung²⁵ diskutiert den Begriff, als einen Grundsatz, aus ihm synthetische Urteile a priori herzuleiten. Es wird außerdem gefordert,

- 1) daß wirklich dergleichen Erkenntnisse aus dem gegebenen Begriffe herfließen, 2) daß diese Erkenntnisse nur unter der Voraussetzung einer gegebenen Erklärungsart dieses Begriffs möglich sind.

2.2.4 Die Geometrie in den Erörterungen des Raumes

Um Gegenstände der eigenen räumlichen Umgebung auszumachen, „muß die Vorstellung des Raumes schon zum Grunde liegen“²⁶. Er ist nicht empirisch, sondern notwendig a priori und liegt „allen äußeren Anschauungen zum Grunde“. Einen absolut leeren Raum kann man sich zwar vorstellen, aber nicht, „daß kein Raum sei“. Damit bedingt der Raum jegliche Erscheinung. Er ist eine reine Anschauung, denn man kann sich nur einen „einigen“ Raum vorstellen. Spricht man von verschiedenen Räumen, so sind diese stets Teile des „allbefassenden“ Raumes. Seine Unterräume gehen ihm nicht vorher, sie können nur „*in ihm*“ gedacht werden“. Damit überträgt sich das Prinzip der reinen Anschauung des Raumes auf alle seine Begriffe, insbesondere auf die Geometrie:

So werden auch alle geometrische Grundsätze, z. E. daß in einem Triangel [Dreieck] zwei Seiten zusammen größer sein, als die dritte, niemals aus allgemeinen Begriffen von Linie und Triangel, sondern aus der Anschauung und zwar a priori mit apodiktischer Gewißheit abgeleitet.

Den Raum stellt man sich als eine „unendliche *gegebene* Größe“ vor. Ein Begriff enthält alle möglichen Vorstellungen, also unendlich viele, „*unter sich*“ aber nicht „*in sich*“. Mit obigem Argument beinhaltet der Raum aber gerade eine unendliche Menge, „denn alle Teile des Raumes ins Unendliche sind zugleich“. Mithin ist der Raum eine Anschauung und kein Begriff.

Die transzendente Erörterung fragt:

Geometrie ist eine Wissenschaft, welche die Eigenschaften des Raums synthetisch und doch a priori bestimmt. Was muß die Vorstellung des Raumes denn sein, damit eine solche Erkenntnis von ihm möglich sei?

Kant verweist auf die Einleitung der *Kritik*, in der gezeigt wird, warum die Geometrie synthetisch ist. Weil sie „Sätze, die über den Begriff hinausgehen“ folgert, kann der Raum selbst kein Begriff sein. Geometrische Sätze sind „insgesamt apodiktisch, d.i. mit dem Bewußtsein ihrer Notwendigkeit verbunden“ und damit apriorisch. Insbesondere hat der Raum nur drei Dimensionen. Seine vermeintliche Absolutheit ist eine wichtige Prämisse der transzendentalen Ästhetik, denn der umfassende Raum beinhaltet alle Räume und überträgt seine Sätze auf sie.

Von Hartmann kritisiert²⁷, „dass Kant die vorbewusste Thätigkeit, welche die Materie der Anschauung räumlich formiert, mit dem von ihren Produkten abgezogenen Begriffe des Raumes vermengt und verwechselt“. Allein die erste sei das „Prius“, nämlich eine reine Anschauung und kein Begriff. Das letztere sei aber das „Posterios der räumlichen Sinneswahrnehmungen, und ein aus diesen abgezogener und zusammengesetzter Begriff“. Was man sich bewusst vorstellen könne

²⁵Vgl. [5], S. 499

²⁶Vgl. ebd., S. 497 ff.

²⁷Vgl. [17], S. 25 ff.

sei allein dieser „komplexe Begriff“. Er gehe aber nicht aus der reinen Anschauung hervor, mithin sei sie nicht seine Voraussetzung. Er werde nämlich erst vom Subjekt aus ihr entwickelt. Die apriorische Anschauungsform „als Regel der Verknüpfung der noch unräumlichen Empfindungen“ könne man sich „auf keine Weise unmittelbar vorstellen, sondern nur denkend erschliessen“:

Dass der bewusste Begriff des Raumes a priori erzeugt wird oder vorgestellt werde, ist demnach psychologisch unrichtig; dass die unbewusste räumliche Anschauungsform sich a priori bethätigt, ist zwar eine unausweichliche Hypothese, aber nimmermehr aus der unrichtigen Behauptung der Apriorität des bewussten Raumbegriffes zu erweisen, wie Kant es versucht.

Er schwanke zwischen der „Annahme einer unbewussten und der einer bewussten Bestätigung der Kategorien und vertauscht beide nach Belieben“:

So vertauscht er die unbewusst wirksame Anschauungsform mit einer bewusst gegebenen reinen formalen Anschauung, und setzt diese mit der von den sinnlichen Anschauungen abgezogenen formalen Abstraktion gleich. Das Mittelglied für die Identifikation des ersten und letzten Gliedes ist aber eine blosser Fiktion, die nirgends existiert; und wenn sie existierte, so wäre sie weder dem ersten noch dem dritten Gliede gleich, könnte also auch nicht die Gleichheit dieser beiden bedeuten.

Schlussendlich fehle sogar der Nachweis, dass Mathematik und Metaphysik synthetisch seien, „d.h. über die Anwendung des Satzes vom Widerspruch auf den von der inneren oder äusseren Erfahrung dargebotenen Bewusstseinsinhalt hinausgehen“. Die Leistung eines mathematischen Beweises liege nicht in einer konstruktiven Synthese, sondern in einer Analyse von Definitionen und bereits vorhandenen Konstruktionen:

In der Arithmetik und Algebra fehlt die synthetische Thätigkeit so sehr, dass „Analysis“²⁸ hier sogar zum Namen wird. Der Unterschied zwischen reiner und angewandter Mathematik und die Verschiedenheit der aus beiden zu ziehenden Folgerungen kommt in der zweiten Periode noch nicht in Betracht.

Dies werde auch in bezug auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung deutlich²⁹. Kant bestätige, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung „subjektiv an der apodiktischen Gewissheit der formalistischen mathematischen Erkenntnis“ teilnimmt, „obwohl sie objektiv nur Grade der Möglichkeit, grössere oder kleine Wahrscheinlichkeit feststellt“. So heisst es in den *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können*³⁰:

Man könnte eben so gut eine Geometrie, oder Arithmetik auf Mutmaßungen gründen wollen; denn was den calculus probabiliū der letzteren betrifft, so enthält er nicht wahrscheinliche, sondern ganz gewisse Urteile über den Grad der Möglichkeit gewisser Fälle, unter gegebenen gleichartigen Bedingungen, die in der Summe aller

²⁸Die Verwendung des Begriffes der Analysis in diesem Kontext ist irreführend. Bereits zu von Hartmanns Zeiten sieht man gemeinhin die Analysis als ein prinzipiell von der Algebra und Arithmetik unabhängiges Gebiet. Der Name lässt sich aus der zergliedernden Untersuchung infinitesimaler Größen erklären, vgl. etwa [4], S. 1. Ihre Grundlagen schaffen Newton und Leibniz unabhängig voneinander aber in ähnlicher Form. Bald darauf entwickelt sich ein Prioritätsstreit zwischen beiden Wissenschaftlern, der noch die Schulen ihre philosophischen Nachfolger belastet, vgl. Niccolò Guicciardini: „Newtons Methode und Leibniz’ Kalkül“ in ebd., S. 89 ff.

²⁹Vgl. [17], S. 82 f.

³⁰[5], S. 1647 f.

möglichen Fälle ganz unfehlbar der Regel gemäß zutreffen müssen, ob diese gleich in Ansehung jedes einzelnen Zufalles nicht genug bestimmt ist. Nur in der empirischen Naturwissenschaft können Mutmaßungen (vermitteltst der Induktion und Analogie) gelitten werden, doch so, daß wenigstens die Möglichkeit dessen, was ich annehme, völlig gewiß sein muß.

Kant habe übersehen, dass „auch die Analogie und Induktion der empirischen Wissenschaften ... nichts ist als eine ... Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf empirische Daten, ... sonst hätte er die erkenntnistheoretische Bedeutung der induktiv erschlossenen Hypothesen auch als eine Art von angewandter Mathematik, d. h. als echte Wissenschaft angesehen“.

Im folgenden³¹ untersucht von Hartmann Kants Antwort auf die Frage, wie synthetische Urteile möglich seien. Unabhängig von seiner oben genannten Anfechtung der notwendig synthetischen Natur dieser Urteile setzt er hierfür ihre Synthetizität voraus:

In der Mathematik schwankt Kant dazwischen, ob alle ihre Urteile synthetisch seien ... oder ob nur die Axiome synthetische Urteile, und alle von ihnen abgeleiteten Erkenntnisse analytisch seien ... oder ob nicht sogar unter ihren Grundsätzen einige analytisch und nur einige synthetisch seien ... Offenbar ist nur das letzte richtig ...

In der Algebra gebe es aber keinen synthetischen Grundsatz und in der Geometrie nur einen einzigen, nämlich, „dass zwei gerade Linien mit gleichen gegenwinkeln parallel sind, oder den Satz dass zwei gerade Linien nur einen oder alle Punkte gemein haben, oder den Satz, dass die gerade Linien der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten sei“. Diese äquivalenten Formulierungen des Parallelenpostulates seien

nichts weiter, als die Voraussetzung, dass der dreidimensionale Raum keine Krümmung (im Sinne einer vierten Dimension) habe. Nimmt man diese Voraussetzung in die Definition des mathematischen Raumes auf, schliesst man also durch sie die nichteuklidische Geometrie aus, so ist die euklidische Geometrie aus dem Begriff des Raumes analytisch zu deducieren, ebenso wie jede nichteuklidische aus einem vorausgesetzten andersartigen Raumbegriff.

Kant weiß, dass die Mathematik einerseits von Definitionen ausgeht und andererseits, dass solche Deduktionen noch keine Erkenntnis darstellen, es sei denn, es gäbe Dinge, „die diesen Formen gemäss sind“. Deshalb sei es nicht nachvollziehbar, wie Kant den Satz „ $7 + 5 = 12$ “ nicht als analytisches Urteil verstehe. Erst die angewandte Mathematik könne synthetisch sein. Dies wiederum könne man aber nicht a priori annehmen. Vielmehr sei es eine provisorische Hypothese, solange bis man sie a posteriori bestätige. Der Unterschied zwischen reiner und angewandter Mathematik verschwinde, wenn die Dinge an sich der Mathematik nicht gehorchten.

2.2.5 Möglichkeiten nichteuklidischer Geometrien und Prioritätsunterschiede zur Newtonschen Philosophie

Der Einfluss der bis dato vorherrschenden Euklidischen Geometrie³² und Newtonschen Physik ist merklich. Tatsächlich zieht Kant in früheren Werken auch andere Formen des Raumes inbetracht.

³¹Vgl. [17], S. 84 f.

³²Man schreibt erst Gauß die Entdeckung einer nichteuklidischen Geometrie zu. Vgl. [7], S. 57: „So tritt auch hier plötzlich ... der umwälzende Gedanke der *nichteuklidischen Geometrie* zutage, der während vieler tausend Jahre keines Menschen Hirn beunruhigt hatte ... es stellt sich heraus, daß Gauß in jedem Punkte allen anderen um einige Jahre voraus war. Abgesehen von dieser Priorität ... hat aber Gauß das größte Verdienst um die nichteuklidische Geometrie ...“

Er äußert dies gut vierzig Jahre vor der *Kritik*, nämlich 1947 in den *Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte*. Das Wirkungsgesetz von Kräften aufeinander, nach welchem der Raum „die Eigenschaft der dreifachen Dimension habe ... [sei] willkürlich ... Gott [hätte] dafür ein anderes ... wählen können“. Dies hätte „eine Ausdehnung von anderen Eigenschaften und Abmessungen bewirken“ können: „Eine Wissenschaft von allen diesen möglichen Raumarten wäre ohnfelbar die höchste Geometrie, die ein endlicher Verstand unternehmen könnte“, wengleich wir prinzipiell unfähig sind, „einen Raum von mehr als drei Abmessungen uns vorzustellen“³³. Man kann diesen Schluss als Begründung dafür deuten, dass die *Kritik* solche Geometrien nicht behandelt, denn sie sind der Anschauung nicht zugänglich.

Man schreibt Kant auch die Entdeckung eines wichtigen Teils des *Newtonschen Gravitationsgesetzes* zu. Dazu wirke die *Gravitationskraft* F zwischen zwei *Massenpunkten* m_1, m_2 . Mit der *Gravitationskonstante* $\gamma := 6.672 \cdot 10^{-11} \text{N m}^2 / \text{kg}^2$ gilt

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

wenn die beiden Massenpunkte den Abstand r voneinander haben. Kant erkennt die Antiproportionalität von F zu r^2 , missdeutet sie aber.³⁴ Ferner schreibt³⁵ von Hartmann, Kant habe sich nicht „Newtons Gedanken der Kraftwirkung in die Ferne“ zu eigen gemacht. Dennoch sei Kant von Newton „in hohem Masse beeinflusst“, nämlich bezogen auf die „mechanische Erklärung aller Veränderungen in der Körperwelt“ sowie die „Zurückführung der Naturmechanik auf atomistisch-gegliederte Kräfte und den real-existierenden als den Schauplatz ihres Wirkens“.

Bei allem Einfluss der Newtonschen Naturphilosophie auf die transzendente Ästhetik stellt Höffe einen Unterschied³⁶ bezüglich der „Priorität“ fest. In Newtons *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* und *De mundi sensibilis* gehe die Zeit dem Raum vor. Die transzendente Ästhetik behandle den Raum aber ausführlicher. Auch die Analytik der Grundsätze innerhalb der transzendentalen Analytik sei auf den Raum zentriert. Die „objektive Realität der Kategorien“ erfordere „immer äußere Anschauungen“ und ohne äußere empirische Anschauung gebe es keine „Selbsterkenntnis aus dem bloßen inneren Bewußtsein“. Die äußere Sinnlichkeit erfülle vier Hauptaufgaben und eine Nebenaufgabe:

Der Raum ist (1) für die äußere Gestalt und Erstreckung und (2) für die entsprechende Individuation zuständig, ferner für (3) die Objektivität der Erkenntnis, sogar für (4) den strittigen Sonderfall, die Selbsterkenntnis. Nicht zuletzt kann man sich unter (5) die zeitliche Ordnung nur analog zur räumlichen vorstellen ...

Für die zweite Aufgabe sei der innere Sinn gleichermaßen geeignet. Die erste und dritte könnten ausschließlich durch den äußeren Sinn erfüllt werden und die vierte verleihe ihm eine „gewisse Priorität“.

Nachdem Kant das synthetische apriorische Wesen der Geometrie feststellt, ist die Frage, wie sie sich im „Subjekt“ manifestiert:

Wie kann nun eine äußere Anschauung dem Gemüte beiwohnen, die vor den Objekten selbst vorhergeht, und in welcher der Begriff der letzteren a priori bestimmt werden kann?

³³Zitiert nach [13], S. 189.

³⁴Vgl. [8], S. 118

³⁵Vgl. [17], S. 3

³⁶Vgl. [3], S. 89

Die „äußere Anschauung“ als „Form des äußeren Sinnes überhaupt“ liefert dem Menschen durch die „formale Beschaffenheit“ die nötige „*unmittelbare Vorstellung* derselben, d.i. *Anschauung*“. Vermeintlich ist diese Beschreibung die einzige Möglichkeit, die geometrischen Erkenntnisse als synthetisch und a priori herauszustellen.

Unter dem Titel „Allgemeine Anmerkungen zur transzendentalen Ästhetik“ gibt Kant eine Zusammenfassung³⁷ der wichtigsten Ergebnisse. Hierbei geht er auch auf die Geometrie ein. Es ist

ungezweifelt gewiß, und nicht bloß möglich oder auch wahrscheinlich, daß Raum und Zeit, als die notwendigen Bedingungen aller (äußern und innern) Erfahrung, bloß subjektive Bedingungen aller unsrer Anschauung sind . . . Nehmet nur den Satz, daß durch zwei gerade Linien sich gar kein Raum einschließen lasse, mithin keine Figur möglich sei, und versucht ihn aus dem Begriff von geraden Linien und der Zahl zwei abzuleiten; oder auch, daß aus dreien geraden Linien eine Figur möglich sei, und versucht es eben so bloß aus diesen Begriffen.

Dazu ist die Anschauung nötig. Diese ist nichtempirisch, weil Erfahrung keine apodiktischen Wahrheiten liefern kann. Die subjektive Bedingung der inneren Anschauung a priori ist zugleich die allgemeine Bedingung der Anschauung a priori. Anderenfalls wäre ein Gegenstand, etwa ein Dreieck, ein Ding an sich. Denn

wie könntet ihr sagen, daß, was in euren subjektiven Bedingungen, einen Triangel zu konstruieren, notwendig liegt, auch dem Triangel an sich selbst notwendig zukommen müsse? denn ihr könntet doch zu euren Begriffen (von drei Linien) nichts Neues (die Figur) hinzufügen, welches darum notwendig an dem Gegenstande angetroffen werden müßte, da dieser vor eurer Erkenntnis und nicht durch dieselbe gegeben ist.

Ohne die subjektive Bedingung der reinen Anschauung ließen sich keinerlei mathematische Aussagen treffen. Mit ihr lassen sich aber auch nur diejenigen Aussagen treffen, die sich nicht auf Dinge an sich beziehen. Zu beachten ist, dass Kant keine Grundlage des inneren und äußeren Sinnes bietet. Wie Höffe sagt, erhebt Kant nur den „schwachen, lediglich negativen Vollständigkeitsanspruch . . . dass alle anderen Elemente der Sinnlichkeit, namentlich die zwei Grundbegriffe der Physik, Bewegung und Veränderung, 'etwas Empirisches voraussetzen'“.

2.2.6 Unterschiede zu Leibniz' Philosophie das Subjekt und die Dinge an sich betreffend

Nach Leibniz kann der Mensch sehr wohl Kants Ding an sich erkennen³⁸. Als weiteren Unterschied bestimmt Leibniz nach Höffe in seinem Rationalismus „alle Individualität restlos von unendlich fein differenzierten begrifflichen Inhalt“. Mit Kant gesprochen erkenne man aber nur „Merkmale“. Ihr beliebig detailliertes Auflisten erreiche nicht die „Individuation“. Dies könne nur die Bestimmung in Raum und Zeit leisten:

So kann man bei zwei Tropfen Wasser von aller innern Verschiedenheit (der Qualität und Quantität) völlig abstrahieren, und es ist genug, daß sie in verschiedenen Örttern zugleich angeschaut werden, um sie für numerisch verschieden zu halten. Leibniz nahm die Erscheinungen als Dinge an sich selbst, mithin für Intelligibilia, d.i.

³⁷Vgl. [5], S. 519 ff.

³⁸Vgl. [2], S. 252: „Die Antithese gilt nach Leibniz: Das Ding an sich kann - verworren - sinnlich vorgestellt und - prinzipiell bis zu völliger Deutlichkeit - denkend erkannt werden“.

Gegenstände des reinen Verstandes (ob er gleich, wegen der Verworrenheit ihrer Vorstellungen, dieselben mit dem Namen der Phänomene belegte), und da konnte sein Satz des Nichtzuunterscheidenden (*principium identitatis indiscernibilium*) allerdings nicht bestritten werden; da sie aber Gegenstände der Sinnlichkeit sind, und der Verstand in Ansehung ihrer nicht von reinem, sondern bloß empirischem Gebrauche ist, so wird die Vielheit und numerische Verschiedenheit schon durch den Raum selbst als die Bedingung der äußeren Erscheinungen angegeben. Denn ein Teil des Raums, ob er zwar einem andern völlig ähnlich und gleich sein mag, ist doch außer ihm, und eben dadurch ein vom ersteren verschiedener Teil, der zu ihm hinzukommt, um einen größeren Raum auszumachen, und dieses muß daher von allem, was in den mancherlei Stellen des Raums zugleich ist, gelten, so sehr es sich sonst auch ähnlich und gleich sein mag.³⁹

Als Gemeinsamkeit zwischen Kant und Leibniz' Lehre erkennt⁴⁰ auch von Hartmann, „dass die sogenannten angeborenen Vorstellungen nur als typische Regeln des formalen Funktionierens dem Verstande angeboren seien, dass das Gebiet der dunkeln, d. h. gar nicht bewussten Vorstellungen in der Seele sehr ausgedehnt und von äußerster Wichtigkeit sei“. Kant bekämpfe aber „die Leibnizsche Ansicht, dass die sinnliche Erkenntnis nur eine verworrene Verstandeserkenntnis sei, zu Gunsten eines schroffen und unvermittelten Gegenstandes von Sinnlichkeit und Verstand“.

2.2.7 Die empirische Realität und transzendente Idealität des Raumes

Es folgen zwei „Schlüsse aus obigen Begriffen“⁴¹. Der erste Schluss ist kurz und negativ. Er zeigt die Bestimmungen der Dinge an sich als empirische Urteile. Folglich ist der Raum „gar keine Eigenschaft irgend einiger Dinge an sich“. Der zweite Schluss ist umfangreicher und stellt das Ende des ersten Abschnittes der transzendentalen Ästhetik dar:

Der Raum ist nichts anders, als nur die Form aller Erscheinungen äußerer Sinne, d. i. die subjektive Bedingung der Sinnlichkeit, unter der allein uns äußere Anschauung möglich ist . . . Wir können demnach nur aus dem Standpunkte eines Menschen vom Raum, von ausgedehnten Wesen etc. reden.

Die Sinnlichkeit ist notwendig, denn ohne sie „bedeutet die Vorstellung vom Raume gar nichts“. Die Grenzen liegen abermals bei den „Dingen an sich“. Der Raum fasst nicht die „Bedingungen der Möglichkeit der Sachen“, sondern nur die ihrer Erscheinungen,

so können wir wohl sagen, daß der Raum alle Dinge befasse, die uns äußerlich erscheinen mögen, aber nicht alle Dinge an sich selbst, sie mögen nun angeschaut werden oder nicht, oder auch, von welchem Subjekt man wolle.

Betrachtet man die Aussage „Alle Dinge sind neben einander im Raum“, so beschränkt man die Allgemeinheit. Das Problem wird erst beseitigt durch das Urteil „Alle Dinge, als äußere Erscheinungen, sind neben einander im Raum“. Diese objektive Gültigkeit bewirkt die „*Realität*“ der Erörterungen über den Raum. Auch besteht eine „*Idealität*“, wenn man anstatt der Struktur unserer Sinnlichkeit einzig die Vernunft selbst nutzt. Damit wird der Raum einerseits „*transzendente Idealität*“ und andererseits zur „*empirischen Realität*“. Der Raum ist die einzige vom

³⁹[5], S. 796

⁴⁰[17], S. 6

⁴¹Vgl. [5], S. 501 ff.

Subjekt ausgehende „auf etwas *Äußeres*“ bezogene Vorstellung a priori, die objektive Erkenntnis liefert. Aus jeder anderen Vorstellung lässt sich kein apriorisches Urteil deduzieren. Ideal sind sie nicht, sie zählen „bloß zur subjektiven Beschaffenheit der Sinnesart“. Es fehlt die Objektivität, da Sinneseindrücke „etwa Farben, Geschmack etc. . . . so gar bei verschiedenen Menschen verschieden sein können“. Kant zieht folgendes Resumée:

Dagegen ist der transzendente Begriff der Erscheinungen im Raume eine kritische Erinnerung, daß überhaupt nichts, was im Raume angeschaut wird, eine Sache an sich, noch daß der Raum eine Form der Dinge sei, die ihnen etwa an sich selbst eigen wäre, sondern daß uns die Gegenstände an sich gar nicht bekannt sein, und, was wir äußere Gegenstände nennen, nichts anders als bloße Vorstellungen unserer Sinnlichkeit sein, deren Form der Raum ist, deren wahres Correlatum aber, d.i. das Ding an sich selbst, dadurch gar nicht erkannt wird, noch erkannt werden kann, nach welchem aber auch in der Erfahrung niemals gefragt wird.

Höffe sieht in dem Raum schlechthin einen strukturellen Fehler⁴². Der objektive „meßbare“ Raum sei Gegenstand der Mathematik und Physik. Daneben gebe es den „subjektiven Raum“, den „Lebens- und Erlebnisraum“. Ihn behandelten

Psychologie, Kunst und Literatur, aber auch die Phänomenologie . . . Kant verbindet beide Vorstellungen und setzt sich zugleich gegen beide ab. Ohne die beiden objektiven Räume, den mathematischen und den physikalischen Raum, miteinander oder mit dem subjektiven Raum gleichzusetzen, erörtert er bloß das objektive 'Substrat' aller Raumvorstellungen, dem, sieht man vom nichtinnerlichen Außereinander ab, jede Bestimmtheit fehlt.

Kant hätte statt von „Raum“ besser von „Raum überhaupt“ oder von „Räumlichkeit“ gesprochen. Die Fokussierung der *Kritik* auf die Mathematik und Physik sei nicht nur eine gewollte Spezialisierung in Anbetracht weiterer möglicher Erkenntnisarten. Die „rein innere Empfindung, die Gefühle der Lust und Unlust“ seien nicht einmal Erkenntnisse. Somit seien die „Vorstellungen *äußerer Sinne*“ die Substanz der inneren Anschauung, aber die „Psychologie von Lust/Unlust“ nicht „erkenntnis-, sprich objektivitätsfähig“.

2.2.8 Kausalität und die notwendige Apriorität der Zeit

Die Vorstellung der Zeit liegt a priori vor, sie ist kein empirischer Begriff. Nur auf diese Weise kann das „Zugleichsein oder Aufeinanderfolgen“⁴³ wahrgenommen werden. Außerdem geht sie notwendigerweise allen Anschauungen voraus, denn man kann „in Ansehung der Erscheinungen überhaupt die Zeit selbst nicht aufheben, ob man zwar ganz wohl die Erscheinungen aus der Zeit wegnehmen kann“. Als Folge existieren Axiome über die Zeit. Sie ist eindimensional und verhält sich im Plural komplementär zum Raum. Mehrere Zeiten können nur nacheinander, nicht gleichzeitig sein. Unterschiedliche Räume hingegen sind gleichzeitig und nicht nacheinander. Erst mit diesen apriorischen Feststellungen lassen sich apodiktische Aussagen als Voraussetzungen für die Erfahrung bilden.

Ebenso wie der Raum ist die Zeit kein „diskursiver, oder, wie man ihn nennt, allgemeiner Begriff“. Auch sind verschiedene Zeiten „nur Teile eben derselben Zeit“. Der Satz über die Ungleichzeitigkeit verschiedener Zeiten ist eine Synthese aus der Anschauung und Vorstellung der Zeit, nicht

⁴²Vgl. [3], S. 87

⁴³Vgl. [5], S. 506 ff.

aber ihrem Begriff“. Die Unendlichkeit der Zeit ist äquivalent dazu, dass „alle bestimmte Größe der Zeit nur durch Einschränkungen einer einigen zum Grunde liegenden Zeit möglich sei“. Die Festlegung von Begriffen durch derartige Einschränkungen entspringt nicht puren Begriffen, sondern der Anschauung.

In Analogie zum Raum⁴⁴, bemerkt Höffe, Kant befasse sich

auch bei der Zeit lediglich mit dem objektiven Substrat, dem es an jeder Bestimmtheit mangelt, weshalb man besser von Zeit überhaupt oder von Zeitlichkeit spricht. Beim Meßgerät für Zeit, der Uhr, bewegen sich die Zeiger, während das Ziffernblatt als unbewegter Hintergrund verharrt. Die Zeit, auf die es Kant ankommt, ist aber jener vorempirische Hintergrund zweiter Stufe, der aller Bewegung, selbst aller Zeitmessung zugrunde liegt.

Die Unterscheidung zwischen „Zeitreihe, Zeitinhalt, Zeituordnung und Zeitinbegriff“ sei aber keine Form der apriorischen Anschauung mehr. Eine solche Aufgabe nehme nicht die transzendente Ästhetik vor, sondern die transzendente Analytik mit ihren Schemata und den Kategorien.

2.2.9 Innere Sinnlichkeit. Die Zeit als subjektive Bedingung der menschlichen Anschauung

Kant hat nach Eigenaussage „das, was eigentlich transzendental ist, unter die Artikel der metaphysischen Erörterung gesetzt“⁴⁵. Die Zeit besteht nicht „für sich selbst“, denn dann wäre sie ohne Gegenstand real. Sie ist auch keine „objektive Bestimmung der Dinge“. Denn in diesem Fall wäre sie abhängig von den Dingen an sich, könnte aber nicht ihre Voraussetzung sein. Mithin ließen sich aus ihr keine synthetischen Urteile a priori ziehen. Aus diesem Widerspruch folgt, dass die Zeit „nichts als die subjektive Bedingung ist, unter der alle Anschauungen in uns stattfinden können. Denn da kann diese Form der innern Anschauung vor den Gegenständen, mithin a priori, vorgestellt werden“. Die Zeit als Form der Sinnlichkeit dient also stets der Anschauung unserer selbst. Sie kann keine Bestimmung einer äußeren Erscheinung sein. Denn sie setzt weder eine „Gestalt“ noch eine „Lage“ fest, sondern die Ordnung unserer eigenen Vorstellung. Die Vorstellung der Zeit ist eine äußere Anschauung:

Und, eben weil diese innere Anschauung keine Gestalt gibt, suchen wir auch diesen Mangel durch Analogien zu ersetzen, und stellen die Zeitfolge durch eine ins Unendliche fortgehende Linie vor, in welcher das Mannigfaltige eine Reihe ausmacht, die nur von einer Dimension ist, und schließen aus den Eigenschaften dieser Linie auf alle Eigenschaften der Zeit, außer dem einigen, daß die Teile der erstern zugleich, die der letztern aber jederzeit nach einander sind.

2.2.10 Die empirische Realität und transzendente Idealität der Zeit

Der Raum ist die Form äußerer Anschauung und die formale apriorische Bedingung aller äußeren Erscheinungen. Die Zeit aber bedingt die apriorische Bedingung sämtlicher Erscheinungen. Sie ist Voraussetzung „der inneren Erscheinung (unserer Seelen) und eben dadurch mittelbar auch der äußeren Erscheinungen“. Schließlich sind sämtliche Vorstellungen die Bestimmungen des Gemüts und gehören zum inneren Zustand des Menschen. Kant formuliert inhaltlich umfassend

⁴⁴Vgl. [3], S. 88

⁴⁵Vgl. [5], S. 509 f.

und nüchtern folgenden Schluss, den man daher als Fundamentaltheorem der transzendentalen Ästhetik bezeichnen kann:

Wenn ich a priori sagen kann: alle äußere Erscheinungen sind im Raume, und nach den Verhältnissen des Raumes a priori bestimmt, so kann ich aus dem Prinzip des innern Sinnes ganz allgemein sagen: alle Erscheinungen überhaupt, d.i. alle Gegenstände der Sinne, sind in der Zeit, und stehen notwendiger Weise in Verhältnissen der Zeit.

Sie ist nur objektiv, wenn man sie auf die Erscheinungen bezieht. Gelöst vom menschlichen Selbst, auf der Ebene der Dinge an sich ist die Zeit „nichts“. Der Schluss, alle Dingen seien in der Zeit, ist nicht zulässig. Hier wird von der menschlichen Anschauung abstrahiert. Sie ist aber Bedingung für die Zeit als Vorstellung der Gegenstände. Es muss also heißen, dass „alle Dinge, als Erscheinungen (Gegenstände der sinnlichen Anschauung) . . . in der Zeit“ sind. Die Zeit ist „*empirische Realität*“, weil sie objektive Gültigkeit besitzt, diese aber notwendigerweise auf Gegenstände der Sinne bezogen ist. Unsere Anschauung ist immer sinnlich und daher können wir nur Gegenstände erfahren, die durch die Zeit bedingt sind. Sie ist nichts in bezug auf die Dinge an sich, wenn man von der Anschauung abstrahiert. Darin besteht ihre „*transzendente Idealität*“. Diese Idealität lässt sich nicht mit den „Subreptionen“⁴⁶ der Empfindungen“. Diese setzen nämlich die objektive Realität voraus, welche nur bei empirischen Erscheinungen in der Zeit nicht vorhanden ist. Den damit verbundenen Subjektivismus formuliert Höffe in der Überschrift „Nur der Mensch braucht Mathematik“⁴⁷.

2.2.11 Eduard von Hartmanns Dilemma der subjektiven Abhängigkeit von Synthetizität und Analytizität eines Urteils

Nach von Hartmann⁴⁸ hat Kant die Möglichkeit nicht beachtet, dass synthetische Urteile a priori zwar „über die subjektive Sphäre hinaus gelten“ aber

ausserhalb dieser Sphäre eine mehr als problematische Bedeutung haben, die erst durch Erfahrung gerechtfertigt wird; in diesem Falle wären sie zwar formell a priori gewonnen, aber ihre Gültigkeit für die reale Sphäre wäre nicht mehr a priori, sondern a posteriori beglaubigt und damit auch ihre synthetische Bedeutung, sofern sie ein reales Subjekt mit realen Eigenschaften verknüpft darstellen, nicht mehr eine apriorische. Diese Frage hat Kant gar nicht erwogen, und damit fehlt seiner Vernunftkritik die Fundamentierung für die zweite Periode, wo noch die Erkennbarkeit der Noumena oder Dinge an sich durch reine Verstandesbegriffe angenommen wird.

Kant habe auch den Begriff des Subjektes nicht hinreichend gefasst. Von dessen Kenntnisstand könne durchaus das Wesen eines Urteils abhängen. In diesem Falle sei „dasselbe Urteil über dieselben Dinge für einen Kenntnisärmeren synthetisch, für einen Kenntnisreicheren analytisch . . . je nachdem der Subjektbegriff ärmer oder reicher, unvollständiger oder vollständiger gefasst ist“. Kant habe dieses Problem offenbar durch die Annahme ausgeschlossen, dass „die reinen Verstandesbegriffe vom Bewusstsein eines jeden Menschen in gleichem Umfang und mit gleichem Inhalt erfasst werden“. Er sei stets von einem Subjekt ausgegangen, das „im reinen Verstande, nicht in der Erfahrung“ seine ursprüngliche Erkenntnis suche. Damit sei aber die Kategorienlehre der

⁴⁶Vgl. [6]: „Subreption (lat. subreptio = Erschleichung von subrepere = erschleichen) nennt man denjenigen Denkfehler, welcher durch sinnliche Täuschungen . . . begangen wird.“

⁴⁷[3], S. 77

⁴⁸Vgl. [17], S. 18

transzendentalen Analytik nicht haltbar. Die Kategorien „als vorbewusste Verstandesfunktionen mögen in jedem Menschen auf gleiche Weise wirksam sein, aber der Inhalt der abstrakten Begriffe, die das reflektierende Bewusstsein aus diesen Funktionen schöpft, ist sehr verschieden“. Deshalb könne auch auf der Ebene der reinen Begriffe des Verstandes „für den Standpunkt des Einen eben dasselbe Urteil synthetisch sein, das für den anderen bereits analytisch ist“.

2.2.12 Kants Diskussion von Argumenten wider die transzendente Ästhetik

Der transzendentalen Erörterung der Zeit schließt Kant eine „Erläuterung“⁴⁹ an. Hier diskutiert er folgendes Argument, eingebracht von „einsehenden Männern“ und „natürlicher Weise“ zu finden „bei jedem Leser, dem diese Betrachtungen ungewohnt sind“:

Veränderungen sind wirklich (dies beweiset der Wechsel unserer eigenen Vorstellungen, wenn man gleich alle äußere Erscheinungen, samt deren Veränderungen, leugnen wollte). Nun sind Veränderungen nur in der Zeit möglich, folglich ist die Zeit etwas Wirkliches.

Die Antwort bereitet Kant „keine Schwierigkeit“. Die Zeit ist durchaus wirklich, nämlich die „wirkliche Form der inneren Anschauung“. Sie hat Realität im Sinne der inneren Erfahrung, die nur im Subjekt liegen kann. Die Zeit ist nicht als Objekt wirklich, sondern als die „Vorstellungsart meiner selbst als Objekts“. Würde man sich selbst oder ein anderes Wesen einen selbst ohne die Voraussetzung der Sinnlichkeit anschauen, dann lieferten obige Bestimmungen einer Veränderung andere Erkenntnisse. In diesen Erkenntnissen käme die Vorstellung der Zeit nicht vor und damit fehlte auch die Veränderung. Der Zeit kann die absolute Realität also nicht zuerkannt werden. Den Grund, „weswegen dieser Einwurf so einstimmig gemacht wird“ sieht Kant in der Vernachlässigung der Rolle von Raum und Zeit als Erscheinung. Die axiomatische Wahrheit des Raumes bezweifle man nicht, da man nach einem gewissen Idealismus die Realität äußerer Gegenstände nicht formal beweisen kann. Ein „bloßer Schein“ der Gegenstände in unserem eigenen Sinne, sei hingegen „unmittelbar durchs Bewusstsein“ real. Kant leugnet diese bloße Realitäten nicht. Er erkennt aber, dass in ihnen jeweils zwei Ebenen zu unterscheiden sind. Die eine behandelt das Ding an sich unabhängig von der Anschauungsform und die andere gerade die Form der Anschauung durch das Subjekt:

Zeit und Raum sind demnach zwei Erkenntnisquellen, aus denen a priori verschiedene synthetische Erkenntnisse geschöpft werden können, wie vornehmlich die reine Mathematik in Ansehung der Erkenntnisse vom Raume und dessen Verhältnissen ein glänzendes Beispiel gibt.

Zeit und Raum bilden gemeinsam die reinen Formen jeder sinnlichen Anschauung und ermöglichen damit synthetische Urteile a priori. Das geschieht indem sie Gegenstände als Erscheinungen betrachten, nicht aber als Dinge an sich. Denn Dinge an sich „allein sind das Feld ihrer Gültigkeit“. Es ist kein weitergehendes objektives Urteil über sie möglich. Ebenso sicher ist auch empirische Erkenntnis. Die „mathematischen Naturforscher“ behaupten eine subsistierende absolute Realität von Raum und Zeit. Damit akzeptieren sie „zwei ewige und unendliche vor sich bestehende Undinge . . . welche dasind (ohne daß doch etwas Wirkliches ist), nur um alles Wirkliche in sich zu befassen“. Mathematische Urteile sind abhängig von Erscheinungen. Das bereitet aber Probleme, „wenn der Verstand über dieses Feld hinausgehen will“. Einige „metaphysische

⁴⁹Vgl. [5], S.514

Naturlehrer“ halten Raum und Zeit für miteinander verbundene, von der Erfahrung getrennte „Verhältnisse der Erscheinungen (neben oder nach einander)“. Bezogen auf wirkliche Dinge, wie den Raum, dementieren sie damit aber die axiomatische Wahrheit oder wenigstens die Gewissheit der Mathematik. A posteriori ist diese nicht mehr vorhanden und die apriorischen Begriffe von Raum und Zeit sind lediglich eingebildet. Es fehlt eine wahre und objektive Anschauung a priori. Die transzendente Ästhetik als Lehre von Raum und Zeit, den beiden Formen der Sinnlichkeit, behebt diese Schwierigkeiten sowohl apriorischer als auch aposterioscher Urteile. Andere sinnlichen Begriffe, wie etwa die Bewegung, vereinigen Raum und Zeit. Sie setzen aber Erfahrung voraus und sind daher nicht in der transzendentalen Ästhetik enthalten. Etwas bewegliches gehört nicht zum Raum selbst, es kann nur in ihm gefunden werden. Ebenso findet die Veränderung innerhalb der Zeit statt, ohne, dass sich die Zeit verändert.

2.3 Die Kritik durch den Logizismus

Die fruchtbaren Begriffsbestimmungen ziehen Grenzlinien, die noch gar nicht gegeben waren. Was sich aus ihnen schliessen lasse, ist nicht von vorneherein zu übersehen⁵⁰; man holt dabei nicht einfach aus dem Kasten wieder heraus, was man hineingelegt hatte.⁵¹

Gottlob Frege

Trotzdem ist ein unstrenger mathematischer Beweis mangelhaft; man darf nicht mit der Ausrede kommen, daß dem gesunden Menschenverstand das Ergebnis richtig erscheint, denn wollten wir uns damit zufrieden geben, so wäre es besser, auf jede Beweisführung zu verzichten, als den gesunden Menschenverstand durch Schwindelnöcker zu retten.⁵²

Bertrand Russell

2.3.1 Freges Kritik an Kants „innerer Anschauung“

Den Logizismus vertreten Frege, Russell, Whitehead und Carnap. Frege betont die Relevanz einer logisch-formalen Begründung der bereits gefunden arithmetischen Erkenntnisse. So ist laut dem Titel des ersten Paragraphen⁵³ seiner *Grundlagen der Arithmetik* (1884) „... in neuerer Zeit ein auf die Strenge der Beweise und scharfe Fassung der Begriffe gerichtetes Bestreben erkennbar“. Eine „blos moralische Überzeugung“ genüge nicht mehr, angefangen von den Begriffen der „Function, der Stetigkeit, der Grenze, des Unendlichen“, der „höheren Analysis“⁵⁴ also, bis hin zur Begründung der vermeintlich gewohnten Zahlensysteme. Beispielhaft sind das „Negative und die Irrationalzahl“ aufgeführt. Frege kritisiert zuvor in der Einleitung⁵⁵ die „psychologistischen“

⁵⁰Dies ist offenbar im Sinne von „überblicken“ gemeint.

⁵¹[1], S. 93

⁵²[10], S. 161 f.

⁵³Vgl. [1], S. 13 ff.

⁵⁴Frege spricht vom aktuellen Standpunkt aus grundlegende Begriffe der Analysis an. Die höhere Analysis im heutigen Sinne wird erst im Laufe des 20. Jahrhunderts entwickelt. Dazu zählen beispielsweise die Maßtheorie, Funktionalanalysis und moderne Differentialgeometrie.

⁵⁵Vgl. ebd., S. 3 ff.

Strömungen des 19. Jahrhunderts. Diese betonten die subjektive Vorstellung mathematischer Objekte bis hin zu einer Grundlegung der Arithmetik durch „Muskelgefühle“. Man dürfe das „Gedachtwerden eines Satzes nicht mit seiner Wahrheit“ verwechseln. Innere Bilder, insbesondere von Zahlen, hätten durchaus ihre Berechtigung, jedoch seien sie „dem Mathematiker als solchem“ gleichgültig. Freges Einleitung gegen den „Subjektivismus und Relativismus“ hat einen rhetorischen Höhepunkt in der Polemik, es fehle „nur noch, dem Wohlgeschmacke des Kuchens eine besondere Bedeutung für den Zahlbegriff zuzuschreiben“. Nach dieser Retrospektive in der Einleitung und der Feststellung im ersten Paragraphen, dieses Denken habe sich geändert, heißt es nun im zweiten Paragraphen, mathematische Beweise sollten „auf den Begriff der Anzahl und auf die von positiven Zahlen geltenden einfachen Sätze führen, welche die Grundlage der Arithmetik bilden“. Nach einer kurzen Erläuterung der Begriffe „apriori/aposteriori“ und „analytisch/synthetisch“ im Kantschen Sinne, legt Frege seine Kritik an dessen Thesen dar. Kant erkläre „Zahlformeln“ wie „ $2 + 3 = 5$ “ für unbeweisbar und synthetisch. Jedoch seien sie unendlichfach vorhanden und daher keine Axiome. Frege pflichtet dem Mathematiker Hermann Hankel bei, es sei paradox und unangemessen, unendlich viele unbeweisbare „Urwahrheiten“ anzunehmen. Im Widerspruch zu Kants Beispiel „ $7 + 5 = 12$ “ sei nämlich

$$\text{„}135664 + 37863 = 173527\text{“} \quad (*)$$

nicht unmittelbar einleuchtend. Daher müsste dieser elementararithmetische Satz beweisbar sein. Auch durch Bezug auf die Anschauung von Fingern oder Punkten laufe Kant Gefahr, sich selbst durch impliziten Empirismus zu widersprechen, „denn die Anschauung von 37863 Fingern ist doch jedenfalls keine reine“. Schon der Terminus der „Anschauung“ sei deplaziert, da bereits bei nur 10 Fingern mehrere mögliche Anschauungen existierten. Nun folgert Frege, selbst wenn wir eine Anschauung sowohl von 135664 Fingern hätten, als auch von 37863 Fingern und 173527 Fingern, so müsse (*) „sofort einleuchten, wenigstens für Finger“ im Falle der Unbeweisbarkeit. Aufgrund dieses erneuten Widerspruchs, schließt Frege, Kant habe sich nur auf kleine Zahlen bezogen. Urteile über große Zahlen wären dann beweisbar und die über kleine Zahlen unmittelbar einleuchtend. Diese Trennung wäre allerdings unscharf. Man würde berechtigterweise fragen, „wenn die Zahlenfolgen etwa von 10 an beweisbar wären . . . warum nicht von 5 an, von 2 an, von 1 an?“. Folglich widerspricht Frege auch Kant bei der Antwort auf die Frage, ob die apriorischen Gesetze der Arithmetik synthetisch oder analytisch seien.⁵⁶

Die von Kant postulierte „reine Anschauung“ sei problematisch. Erwäge man,

was alles Grösse genannt wird: Anzahlen, Längen, Flächeninhalte, Volumina, Winkel, Krümmungen, Massen, Geschwindigkeiten, Kräfte, Lichtstärken, galvanische Stromstärken u.s.f., so ist wohl zu verstehen, wie man dies einem Grössen begriffe unterordnen kann; aber der Ausdruck „Anschauung der Grösse“ und gar „reine Anschauung der Grösse“ kann nicht als zutreffend erkannt werden.

Man könne weder von „10 000“ noch von Zahlen im allgemeinen oder gar Größen im allgemeinen eine Anschauung haben. Kants Definition der Anschauung als einzelne Vorstellung und die des Begriffs als allgemeine oder reflektierte Vorstellung enthalte die Beziehung der transzendental-ästhetischen Sinnlichkeit gar nicht. Diese Sinnlichkeit sei jedoch Voraussetzung für die Erkenntnis synthetischer Urteile a priori. Der prinzipielle Unterschied der Logik zu Kants Metaphysik werde an dem Beispiel deutlich: „Im logischen Sinne könnte man 100 000 eine Anschauung nennen;

⁵⁶Vgl. [1], S. 26 f.

denn ein allgemeiner Begriff ist es nicht. Aber in diesem Sinne genommen, kann die Anschauung nicht zur Begründung der arithmetischen Gesetze dienen“.

Zu Kants Diskussion des Raumes als eine Anschauung betont⁵⁷ Frege, „es wäre möglich, dass [der Raum] andern Vernunftswesen sich ganz anders als uns darstellte. Ja, wir können nicht einmal Wissen, ob er dem einen Menschen so wie dem andern erscheint; denn wir können die Rauman-schauung des einen nicht neben die des andern legen, um sie zu vergleichen.“ Das Objektive der Geometrie bestehe mithin in ihrer Axiomatik, welche durch „die That“ allgemein anerkannt sei und sich mit Worten beschreiben lasse. Das rein Anschauliche sei aber nicht mitteilbar.

Zusammenfassend heißt es im „Schluss“, dem fünften Kapitel⁵⁸, Kant habe die analytischen Ur-teile „wohl in Folge einer zu engen Begriffsbestimmung“ unterschätzt. Seine Einteilung in analytische und synthetische Urteile sei nicht erschöpfend. Auf den ersten Blick wäre eine äquivalente Formulierung zu Kants Frage, ob der „Prädikatsbegriff“ eines gewissen „Subjektbegriffes“ per definitionem in diesem enthalten sei. Im Falle, dass das Subjekt ein einzelner Gegenstand sei oder, dass es sich um ein Existentialurteil handle, könne aber von einem Subjektbegriff keine Rede sein. Kant scheine den Begriff „durch beigeordnete Merkmale bestimmt zu denken; das ist aber eine der am wenigsten fruchtbaren Begriffsbildungen“. Mathematische Sätze als Folgerungen aus Definitionen müsste man Kant zufolge für synthetisch halten. Da sie aber rein logisch bewiesen werden könnten, seien sie analytisch und „in der That in den Definitionen enthalten, aber wie die Pflanze im Samen, nicht wie der Balken im Hause.“ Auch sei die Sinnlichkeit keine Voraussetzung für alle Gegenstände, wie etwa die Null und die Eins zeigten. Wenn Kant nun das Wort „Gegenstand“ in einem anderen Sinne definiert hätte, so müsste man die Null und die Eins grundsätzlich vernachlässigen, denn sie wären keine Begriffe. Von Begriffen verlange Kant aber gerade die Ergänzung um den Gegenstand in der Anschauung.

Trotz alledem ist Paragraph 89 betitelt mit „Kants Verdienst der Mathematik“. Frege erwähnt nun die philosophischen Gemeinsamkeiten mit diesem „Geiste . . . zu dem wir nur mit dankbarer Bewunderung aufblicken können“, welche nichtsdestoweniger überwiegen. Bereits die Unterscheidung zwischen synthetischen und apriorischen Urteilen sei zu würdigen, da sie das „wahre Wesen“ der Geometrie als synthetisch und a priori enthüllt habe. Die Irrung inbezug auf die Arithmetik tue seinem verdienst keinen wesentlichen Abtrag.

2.3.2 Die Russellsche Antinomie und die *Principia Mathematica*

Das logizistische Programm führt die elementare Arithmetik als Grundlage jeglicher höheren Mathematik definitiv auf eine kleine Anzahl von Axiomen zurück. Mathematische Sätze sind stets logische Sätze und müssen sich innerhalb dieser Logik beweisen lassen. Die Axiome selbst sollen logisch einsichtig und apriorisch sein, aber „eines Beweises weder fähig noch bedürftig“⁵⁹. Frege führt in seiner *Begriffsschrift* (1879) eine Syntax formaler Sprachen ein, die heute nur leicht abgewandelt gebräuchlich ist. Nach seinen philosophischen und weiteren logischen Betrachtungen in den *Grundlagen* präzisiert er sein Programm als *Grundgesetze der Arithmetik* (1893 und 1903) in zwei Bänden. Russell und Whitehead folgen dem gleichen Ziel. Auf den fast 700 Seiten der *Principia Mathematica* (1910) findet sich eine rein logische Herleitung einer Mengenlehre, welche auch Arithmetik mit *Kardinal-* und *Ordinalzahlen* beinhaltet und die Menge der reellen Zahlen beschreibt. Eine Kardinalzahl gibt die *Mächtigkeit einer Menge* an, also die Anzahl ihrer Elemente. Wichtig ist dies insbesondere für unendliche Mengen. Die Ordinalzahlen sind eine Abstraktion

⁵⁷Vgl. [1], S. 40

⁵⁸Vgl. ebd., S. 92 ff.

⁵⁹Ebd., S. 15

der alltäglichen Ordnungszahlen auf unendliche Mengen mit allgemeinen Ordnungsrelationen. Im Falle einer geordneten Menge geben sie also die jeweiligen Positionen der Elemente an. Dieser Terminus findet sich zwar beispielsweise in der heute üblichen *Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Auswahlaxiom* (ZFC⁶⁰) wieder, doch benutzt Russell in den *Principia Mathematica* ein anderes Axiomensystem, nämlich seine eigene sogenannte *Typentheorie*. Es scheint, dass man die Arithmetik im logizistischen Sinne rigoros beschreiben kann. So wird der Satz „ $1 + 1 = 2$ “ nichttrivial als Resultat einer logischen Proposition auf Seite 379 der *Principia Mathematica* gezeigt. Vor allen Dingen aber soll die Typentheorie Paradoxa wie die *Russellsche Antinomie* lösen.

Diese ist der Beginn der *Grundlagenkrise*. Um 1900 entdeckt Russell, dass Freges Axiomensystem einen Widerspruch aufweist: die Existenz der Menge aller Mengen mit einer gewissen Eigenschaft. Demnach müsste auch die Menge $M := \{A : A \notin A\}$ aller Mengen A existieren, die sich nicht selbst enthalten. Dies hätte aber den Widerspruch $A \in M \Leftrightarrow A \notin M$ zufolge. Es wäre A genau dann in M , wenn A nicht in M wäre. Beispielsweise kann dieser Widerspruch durch die Einführung verallgemeinerter Mengen, der *Klassen*, gelöst werden. In einer solchen Theorie existiert M als *echte Klasse*, somit nicht als Menge. Auch Ernst Zermelo und Adolf Abraham Halevi Fraenkel berücksichtigen dies bei der Begründung der ZFC. Zermelo ergänzt sie im Jahre 1930 um das *Fundierungsaxiom*⁶¹ und damit die notwendige Existenz *minimaler Elemente*. Als direkte Konsequenz ist keine Menge Element von sich selbst. Da die ZFC-Mengenlehre Klassen nicht kennt, verbietet sie die generelle Existenz von M .

Fundierungsaxiom. *In jeder nichtleeren Menge A gibt es ein Element a , das mit A disjunkt ist. Ein solches a heißt minimales Element.*

Satz. *Für jede Menge A gilt $A \notin A$.*

Beweis. Für jedes A existiert die Menge $A' := \{A\}$. Wegen des Fundierungsaxioms besitzt A' ein minimales Element. Dieses kann nur A sein. Es gilt also $A \cap A' = \emptyset$ und damit $A \notin A$. \square

Das erste Kapitel des Haupttextes in der *Principia Mathematica* beginnt mit Russells „Theory of Deduction“⁶². Von der „Theorie der Deduktion“ ist auch in seiner *Einführung in die mathematische Philosophie* (1919) die Rede. Einleitend⁶³ betont er, „kein Appell an den gesunden Menschenverstand oder an die ‚Anschauung‘, sondern nur strenge deduktive Logik soll in der Mathematik vorkommen, nachdem einmal die Prämissen aufgestellt worden sind.“ Die *Prämissen* definiert Russell als „in der Deduktion“ existente Sätze, „aus denen wir einen Satz ableiten.“ Diesen nennt er *Schluss*. Folgerichtig kritisiert Russell seinerseits Kant. Was zu dessen Zeiten in der Mathematik nicht „bewiesen werden konnte, das kannte man nicht - z.B. das Parallelenaxiom.“ Die „innere Anschauung“ dementiert Russell, denn einerseits könne in der Mathematik nur das erkannt werden, was logisch ableitbar sei und andererseits müssten außermathematische Kenntnisse rein empirisch erworben sein, also niemals a priori. Hier verweist er auf die *Principia Mathematica* und die *Principles of Mathematics* (1903). Aber auch in seiner *Philosophie des*

⁶⁰Das C steht für „Axiom of Choice“. Sei dazu A eine Menge nichtleerer Mengen. Vermöge des Auswahlaxioms existiert eine *Auswahlfunktion* f , derart, dass für alle $X \in A$ gilt $f(X) \in X$. Anschaulich gesprochen wählt f zu jedem X in A genau ein Element aus.

⁶¹Vgl. [16], S. 169 f.

⁶²[12], S. 94

⁶³[10], S. 161

Abendlandes (1946) findet sich eine Argumentation⁶⁴ gegen Kants transzendente Theorie von Raum und Zeit. Insbesondere setzt sich Russell mit den metaphysischen Argumenten auseinander. Hierzu verweist er regelmäßig auf die zeitgenössische Physik und ihren Einfluss auf das menschliche Bewusstsein.

2.3.3 Russells Kritik an Kants metaphysischen Argumenten und der transzendentalen Erörterung

Inbezug auf das erste metaphysische Argument von Kant stößt Russell „auf eine Schwierigkeit, die Kant nie bemerkt zu haben scheint. Was veranlaßt mich, Objekte der Wahrnehmung gerade so und nicht anders zu ordnen? . . . Nach Kant sind Augen und Mund Dinge-an-sich und bewirken bei mir getrennte Wahrnehmungen; aber nichts entspricht bei ihnen der räumlichen Anordnung, die in meiner räumlichen Wahrnehmung existiert.“ Im folgenden dient die moderne Farbenlehre als Beispiel. Die Ursache einer Farbe liege nicht in unseren Sinnen, sondern in ihrer charakteristischen Wellenlänge. Da Wellen aber Raum- und Zeitabhängig sind, könnten sie nach Kant nicht zu den Ursachen unserer Wahrnehmung gehören. Gesetzt den Fall jedoch, gemäß der Physik hätten der Raum und die Zeit unserer Wahrnehmung „Gegenstücke“ in der materiellen Welt, so könnte man die Geometrie darauf anwenden. Dies aber mache Kants Ausführungen zum Argument hinfällig, der Raum sei nichtempirisch: „Kant ist der Ansicht, der Verstand ordne den Rohstoff der Empfindung, hält es aber niemals für nötig zu erklären, warum er so und nicht anders ordnet.“ Die Argumentation bezogen auf die Zeit sei noch problematischer:

Ich gewahre den Blitz, bevor ich den Donner wahrnehme; ein Ding-an-sich *A* verursachte meine Wahrnehmung des Blitzes, und ein anderes Ding-an-sich *B* verursachte meine Wahrnehmung des Donners; aber *A* war nicht früher als *B*, denn Zeit gibt es nur in den Beziehungen der Wahrnehmung zueinander. Wie kommt es also, dass zwei zeitlose Dinge, *A* und *B*, zeitlich verschiedene Wirkungen hervorrufen?

Hätte Kant recht, so müsste dieser Prozess willkürlich entstehen, denn zwischen *A* und *B* könne keine andere Kausalität stiftende Beziehung existieren.

Nach dem zweiten metaphysischen Argument könne man sich den Raum ohne etwas darin befindliches vorstellen. Es scheint Russell, „als könne man keinen ernstzunehmenden Beweis auf dem aufbauen, was wir uns vorstellen oder nicht vorstellen können . . .“. Wir hätten kein Bild eines absoluten Raums im Kantschen Sinne, welcher in dieser Hinsicht von Newton beeinflusst sei. Russell liefert ein kanonisches Gegenbeispiel. Man könne sich höchstens vorstellen, in dunkler bewölkter Nacht zum Himmel aufzublicken. Dann befinde man sich aber im Raum und stelle sich darin trotzdem die Wolken vor, die man nicht sehen könne.

Die Hauptaussage des dritten Argumentes sei die Unmöglichkeit einer „Vielheit im Raum selbst“. Der Beweis ließe sich in Anbetracht der „modernen“ Sicht eines „relativen“ Raumes nicht bringen. Den „Raum“ wie die „Räume“ gebe es als Substantiva nicht mehr. Erneut deutet Russell hier also auf einen Paradigmenwechsel in der Physik hin und dem damit verbundenen Bewusstsein. Kant wolle nun im vierten Argument zeigen, dass der Raum eine Anschauung und kein Begriff ist:

Seine Prämisse lautet: 'Der Raum wird als unendlich *gegebene* Größe' vorgestellt. So etwas kann nur jemand behaupten, der auf dem flachen Lande, etwa in der Umgebung

⁶⁴Vgl. [11], S. 720 ff.

Königsbergs, lebt; ich kann mir nicht denken, dass der Bewohner eines Alpentales gleicher Meinung sein könnte.

Die Möglichkeit eines gegebenen Unendlichen sei abwegig. Es sei eher möglich, dass der „Teil des Raumes gegeben ist, der mit Gegenständen der Wahrnehmung bevölkert ist.“ Von anderen Räumen hätten wir lediglich das Gefühl, es wäre darin Bewegung möglich. Es folgt ein Verweis auf neuartige geometrische Hypothesen zeitgenössischer Astronomen, „der Raum sei in Wirklichkeit nicht unendlich, sondern umgebe uns im Rund wie die Oberfläche einen Globus.“

Im Vergleich zu den metaphysischen Argumenten der *Kritik* sei die transzendente Erörterung der *Prolegomena* „bestimmter“ dargestellt und auch bestimmter zu widerlegen. Ihre Aussagen über die Geometrie seien hinfällig. Man habe nämlich einerseits die nichtsynthetische „reine Geometrie“, welche aus Axiomen hervorgehe und keiner anschaulichen Figuren bedürfe. Klarerweise sei sie apriorisch. Die „Geometrie als Zweig der Physik“ hingegen, etwa in der allgemeinen Relativitätstheorie, stütze sich auf die Empirie. Axiome würden hier durch Messergebnisse aufgestellt und seien nichteuklidisch. Diese Art der Geometrie sei also synthetisch, aber nicht apriorisch.

Russell verallgemeinert diese Betrachtungen im folgenden. Gemäß der Physik geht er nimmt er an, dass alle menschlichen Wahrnehmungen einen materiellen Auslöser haben. Er schließt, „daß alle tatsächlichen Eigenschaften am Wahrgenommenen sich von denen ihrer nicht-wahrgenommenen Ursachen unterscheiden, daß aber eine gewisse Ähnlichkeit in der Struktur der Wahrnehmungen und dem System ihrer Ursachen gegeben ist.“ Um das Beispiel der Farbenlehre aufzugreifen, fungierten damit die Wellenlängen als Ursachen für Farben, die wir wahrnahmen. Er folgert die Existenz einer analogen Relation zwischen „dem Raum als einem Bestandteil des Systems der Wahrnehmungen und dem Raum als einem Bestandteil des Systems nicht-wahrgenommener Ursachen von Wahrnehmungen.“ Letztlich sei dies ein Ausdruck des deterministischen Kausalitätsprinzips, dass gleiche Ursachen auch gleiche Wirkungen zufolge hätten. Demnach seien stets zwei Räume vorhanden, ein aposteriorischer subjektiver und ein apriorischer objektiver. Insbesondere übertrügen sich diese Grundsätze auf alle Objekte innerhalb des jeweiligen Raumes. Wie also der umfassende Raum erkannt werde, so würden auch konkrete Farben wahrgenommen. Wie der allgemeine Raum gefolgert werde, so würden die Wellenlängen logisch begründet.

Diese Trennung sei bei der Zeit nicht vorzunehmen. Hier fiel die subjektive mit der objektiven Zeit zusammen. Wäre dem nicht so, dann stießen wir etwa bei dem obigen Beispiel des Blitzes auf einen Widerspruch zur Kausalität. Der wahrnehmbare Raum sei „in einem bedeutenden Sinne“ subjektiv, die Zeit jedoch in gar keiner Hinsicht.

Russell fasst zusammen, die Wahrnehmung eines Dinges an sich entspreche im zeitgenössischen Verständnis den physikalischen Wechselwirkungen. Eine Forderung dieser beiden äquivalenten Voraussetzungen sei jedoch logisch nicht notwendig. Widersprüche man ihnen, so bestünden keine subjektiven Wahrnehmungen mehr. Ihnen könne nämlich nichts „gegenübergestellt werden“. Unter anderem dieses Dilemma führt Russell zu dem Schluss, das Ding an sich sei ein „unglückliches Element in Kants Philosophie“.

2.3.4 Das Scheitern der Typentheorie und das Ende des Logizismus

An dem langen Weg aus der Grundlagenkrise ist Frege nicht mehr beteiligt. Nachdem sich die Schwierigkeiten der Russellschen Antinomie herausstellen, wendet er sich enttäuscht von der formalen Logik ab und sieht den Logizismus als gescheitert an⁶⁵. Zwar hat er großen Anteil daran, dass die logische Rigorosität in der Mathematik etabliert ist. Aber die Forderung nach

⁶⁵Vgl. [15], S. 335 f. zu Freges auf lange Sicht gescheiterten Versuchen, die russellsche Antinomie zu beheben.

Übersichtlichkeit und Einfachheit der Axiome im Fregeschen Sinne kann nicht erfüllt werden, wie etwa das *Unendlichkeitsaxiom*⁶⁶ der ZFC zeigt. Auch Russells Typentheorie setzt sich nicht durch. So vielversprechend sie anfangs scheint, sie erreicht schnell die Grenzen innerhalb ihres eigenen Systems. Man erkennt, dass wichtige Axiome selbstbezüglich oder nicht innerhalb der Typentheorie beweisbar sind. Damit schlägt das logizistische Programm fehl.

⁶⁶Dieses sichert die Existenz sogenannter *induktiver Mengen*. Das sind Mengen, welche die leere Menge und mit jeder Menge x auch $x \cup \{x\}$ als Elemente enthalten. In der Tat lassen sich die natürlichen Zahlen \mathbb{N} als Schnitt aller induktiver Mengen definieren. Dann ist $\mathbb{N} := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$.

Kapitel 3

Konklusion

3.1 Widersprüche der unendlichen Anschauungen

Mit der Apriorität des Raumes wird vorausgesetzt, dass der Mensch über eine Vorstellung des prinzipiellen Äußeren verfügt. Das ist in der geforderten Schärfe allerdings nicht erfüllt. Schließlich kann man aus seiner Erfahrung abstrahieren und erst durch sie Begriffe bilden, ohne dass die Gesamtheit dieser Begriffe dem apriorischen Denken bereits zugrunde liegt.

Desweiteren können wir den hypothetischen leeren Raum nicht als Raum wahrnehmen. Russells Gegenbeispiel lässt sich abstrakt formulieren. Wir können die Anschauung des Raumes durchaus um eine gewisse Anzahl von Körpern reduzieren. Aber ein Entfernen sämtlicher Körper liefert keine Anschauung des Raumes mehr, sondern nur einen Begriff innerhalb des Verstandes. Damit wird auch die Reihenfolge der Prioritäten umgekehrt. Die Vorstellungen von Körpern sind keine Folge der apriorischen Anschauung des Raumes. Vielmehr liefert erst die Anschauung des Körpers, der durch seine Ausdehnung identifiziert wird, den Raum als Anschauung.

Mithin gibt es keine Anschauung des Raumes als solchen, sondern stets nur Anschauungen seiner begrenzten Teilräume. Der unendlich gegebene Raum ist ebenso wie der leere Raum ein reiner Verstandesbegriff. Die Aussage, ein Begriff könne zwar unendlich viele Begriffe unter sich, aber nicht in sich enthalten, ist nicht klar. Ebenso verhält es sich mit dem Schluss, dass demnach der Raum als Oberraum unendlich vieler Teilräume eben kein Begriff sein könne.

Die menschliche Anschauung zeigt offenbar Defizite im Unendlichen. In der Mathematikgeschichte lässt sich das anhand der Entwicklung der Analysis als Kalkül infinitesimaler Größen nachvollziehen. Die intuitiven Theoreme von Leibniz und Newton führen zu Widersprüchen mit der Logik. Da die Axiome der Logik die Voraussetzung jeglichen mathematischen Denkens sind, schließt man, dass die intuitive Begründung der Sätze nicht ausreicht. Das macht die Formalisierung der Analysis beginnend mit Karl Weierstraß im 19. Jahrhundert nötig.

3.2 Das Rekursionsprinzip als Widerlegung der notwendigen Synthetizität arithmetischer Urteile

Auch Erkenntnisse der Mengenlehre verdeutlichen dies. So entdeckt Georg Cantor gegen Ende des 19. Jahrhunderts die Gleichmächtigkeit von \mathbb{N} , \mathbb{Z} und \mathbb{Q} . Das mutet kontraintuitiv an, lässt sich aber formal leicht zeigen. Die entsprechenden Beweise sind dann anschaulich durch ein Rekursionsprinzip zugänglich. Dieses besteht aus zwei Schritten. Zunächst definiert man einen Anfangswert. Dann erklärt man eine Schlussweise von einem zum nächsten Glied für alle Glieder,

die größer oder gleich dem Anfangsglied sind. Damit erhält man Aussagen über unendlich viele Elemente. Die resultierende Anschauung ist kein gesamtheitlicher Überblick dieser unendlich vielen Rekursionsschritte, sondern die Vorstellung eines einzigen Schrittes sowie die rein formale Einsicht, dass dieser sukzessive auf alle Glieder angewendet wird.

Das Beispiel des Rekursionsprinzips lässt sich in der Argumentation auch weitergehend benutzen. Aus logisch voneinander unabhängigen Axiomen der Arithmetik lassen sich klarerweise synthetische Schlüsse ziehen. Aber ein arithmetisches Urteil ist nicht notwendig synthetisch. Man kann \mathbb{N} mittels der sogenannten *Peano-Axiome* durch Rekursion definieren. Sei dazu \mathcal{N} eine Menge mit $0 \in \mathcal{N}$. Für $n \in \mathcal{N}$ sei $\nu(n) := n + 1$. Dann heißt $\nu(n)$ der *Nachfolger* von n . Ferner gebe es kein n mit 0 als Nachfolger und keinen Nachfolger mit mehr als einem Vorgänger. Von allen Mengen mit $0 \in \mathcal{N}$ und $n \in \mathcal{N} \Rightarrow \nu(n) \in \mathcal{N}$ sei \mathbb{N} die kleinste.

Die Synthetizität von „ $7 + 5 = 12$ “ ist plausibel, wenn etwa ein Grundschüler das Kopfrechnen lernt. Doch bei größeren Zahlen gilt dies nicht mehr. Diese werden etwa bei einer Multiplikation gemäß des Distributivgesetzes zerlegt. Damit verliert sich die Anschauung in einen Rückgriff auf eine formale Zergliederung. Das Urteil wird analytisch, wie Frege andeutet.

Nach der Peano-Arithmetik ist „ $7 + 5 = 12$ “ das arithmetische Urteil

$$\nu(\nu(\nu(\nu(\nu(\nu(0)))))) + \nu(\nu(\nu(\nu(0)))) = \nu(\nu(\nu(\nu(\nu(\nu(\nu(\nu(\nu(\nu(0))))))))).$$

Die Anschauung dient allenfalls zur Bildung eines allgemeinen Nachfolgers ν . Das gesamte Urteil benutzt aber die rekursive Definition von \mathbb{N} und ist damit analytisch.

3.3 Die Hinfälligkeit der reinen Anschauung

Sofern ein Satz der Geometrie bewiesen werden soll, bedarf es seiner Ableitung aus dem entsprechenden geometrischen Axiomensystem. Damit ist der Satz aber nicht Teil einer Anschauung, auch keiner reinen. Die Anschauung eines geometrischen Objektes kann nie rein erfolgen, da wir uns weder allgemeine endliche Strecken noch unendliche Strecken vorstellen können. Das innere Bild eines allgemeinen Dreieckes erforderte das innere Bild eines allgemeinen Winkels. Der Begriff der reinen Anschauung verliert seine Bedeutung, denn unser Vorstellungsvermögen ist an spezifische Quantitäten in der Ausdehnung und an spezifische Qualitäten in der Farbe eines Objektes gebunden. Selbst wenn wir eine davon unabhängige Anschauung hätten, müsste der Beweis eines geometrischen Satzes formal erfolgen. Die reine Anschauung fällt mit der empirischen Anschauung zusammen und kann damit nicht als Erkenntnisapparat für die apriorische Geometrie dienen.

3.4 Der Zirkelschluss der Erörterungen

Zusätzlich zu diesen Einschränkungen der Allaussagen in der transzendentalen Ästhetik liegt ein problematischer Schluss vor. Nach der metaphysischen Erörterung sind Raum und Zeit apriorische Anschauungen, da sie die mathematischen, synthetischen Urteile a priori belegen. Das ist ein Verweis auf die

transzendente Erörterung. Diese wiederum begründet die apriorische Synthetizität der Mathematik mit dem Raum und der Zeit als den reinen Anschauungen in der metaphysischen Erörterung. Die Argumentation weist grundlegende Lücken auf, da wir gezeigt haben, dass mathematische Urteile nicht notwendig synthetisch sind.

Ginge man von den mathematischen Gegenständen als Dingen an sich aus, so ließen sich überhaupt keine Aussagen über sie treffen. Einerseits betont Kant die Unentscheidbarkeit einer solchen Theorie. Andererseits bekräftigt er aber, dass Raum und Zeit keinesfalls Grundlegungen der Dinge an sich sind. Die einzige Begründung hierfür ist abermals die notwendige apriorische Synthetizität der Mathematik.

Anhand dieser konsequent selbstbezüglichen Argumentation einerseits und den Entwicklungen der modernen Mathematik andererseits, lässt sich einsehen, warum Kants Thesen über die Mathematik in der transzendentalen Ästhetik gemeinhin abgelehnt werden. Mathematiker wie Philosophen hegen eine platonistische Sicht, die sich auch bereits in Freges *Grundlagen* findet. Die mathematische Welt existiert hiernach vom Menschen unabhängig und wird von ihm entdeckt. Mathematische Wahrheit ist rein formal begründet und frei von Subjektivität. Ihre Gültigkeit sieht der bloße Verstand ein. Eine abstrakte Anschauung spielt lediglich eine kognitive und psychologische Rolle bei der Erkenntnisfindung. Solch eine Anschauung kann man etwa durch das vielfältige Anwenden einer mathematischen Definition gewinnen. Die Arbeit des einzelnen Mathematikers zeigt ebenso wie die gesamte Mathematikgeschichte eine charakteristische Asymmetrie. Mathematische Erkenntnis wird induktiv gefunden, aber deduktiv behandelt.

Mathematische Notationen

$:=, :\Leftrightarrow$	Per definitionem gleich/genau dann, wenn
\vee	Logisches nichtexklusives „oder“
\wedge	Logisches „und“
\neg	Logisches „nicht“
$\varphi \Rightarrow \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$	Halbformale Implikation: „Aus der Aussage φ folgt die Aussage ψ “
$\varphi \Leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$	Halbformale Äquivalenz: „Es ist φ äquivalent zu ψ .“/„Es gilt φ genau dann, wenn ψ gilt.“/„Es gilt φ dann und nur dann, wenn ψ gilt.“
$\emptyset := \{ \}$	Die <i>leere Menge</i> . Jede andere Menge heißt <i>nicht-leer</i> .
$x \in A$	„Es ist x Element von A .“/„Es ist x in A (enthalten).“
$x \notin A$	„Es ist x nicht Element von A .“/„Es ist x nicht in A (enthalten).“
$\{x : E(x)\}$	Menge aller Elemente (<i>Subjekte</i>) x mit der logischen Eigenschaft (<i>Prädikat</i>) $E(x)$
$A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}$	<i>Vereinigung/Vereinigungsmenge</i> der Mengen A und B
$A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$	<i>Schnitt/Schnittmenge</i> der Mengen A und B
$A \cap B = \emptyset$	<i>Disjunktheit</i> : A und B haben keine gemeinsamen Elemente
$A \subset B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$	Es ist A eine Teilmenge von B .
$f : A \rightarrow B$ mit $f(a) = b \Leftrightarrow (a, b) \in f$	Man nennt f <i>Funktion</i> oder <i>Abbildung</i> . Anschaulich ordnet f jedem a eindeutig ein b zu. Die mengentheoretische Definition fasst f als „zweidimensionale Menge“ auf, welche genau die geeigneten Paare (a, b) enthält.
$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$	Die <i>Menge der natürlichen Zahlen</i> , hier in aufzählender Form definiert. Wahlweise setzt man auch $0 \notin \mathbb{N}$.
$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	Die <i>Menge der ganzen Zahlen</i> , hier in aufzählender Form definiert.
$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}$	Die <i>Menge der rationalen Zahlen</i> .

Literaturverzeichnis

- [1] FREGE, GOTTLLOB (AUTOR)/THIEL, CHRISTIAN (HRSG.). *Die Grundlagen der Arithmetik*. Meiner, Hamburg, 1986.
- [2] GAWLINA, MANFRED. *Das Medusenhaupt der Kritik: Die Kontroverse zwischen Immanuel Kant und Johann August Eberhard*. Walter de Gruyter, Berlin, 1996.
- [3] HÖFFE, OTFRIED. *Kants Kritik der reinen Vernunft. Die Grundlegung der modernen Philosophie*. C. H. Beck, München, 2004. 4. Auflage.
- [4] JAHNKE, HANS NIELS (HRSG.). *Geschichte der Analysis*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1999.
- [5] KANT, IMMANUEL (AUTOR)/WEISCHEDEL, WILHELM (HRSG.). *Werke in zwölf Bänden*. Suhrkamp, 1977. Digitale Bibliothek Sonderband. Directmedia Publishing GmbH, Berlin, 2005.
- [6] KIRCHNER, FRIEDRICH. *Wörterbuch der philosophischen Grundbegriffe*. Philosophische Bibliothek, Leipzig, 1907. 5. Auflage.
http://www.textlog.de/kirchner_woerterbuch.html.
- [7] KLEIN, FELIX. *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*. Chelsea Publishing Company, New York, 1999.
- [8] KRÖMER, RALF. *Zur Geschichte des axiomatischen Vektorraumbegriffs (Diplomarbeit)*. Universität des Saarlandes, Saarbrücken, 2000.
- [9] PRAUSS, GEROLD. *Einführung in die Erkenntnistheorie*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1980.
- [10] RUSSELL, BERTRAND. *Einführung in die mathematische Philosophie*. Holle Verlag, 1960.
- [11] RUSSELL, BERTRAND. *Philosophie des Abendlandes*. Europa Verlag, Zürich, 2007.
- [12] RUSSELL, BERTRAND/WHITEHEAD, ALFRED NORTH. *Principia Mathematica*. University Press, Cambridge, 1910. <http://name.umd.umich.edu/AAT3201.0001.001>.
- [13] SCHEFFER, THOMAS. *Kants Kriterium der Wahrheit: Anschauungsformen und Kategorien A priori in der 'Kritik der reinen Vernunft'*. Walter de Gruyter, Berlin, 1993.
- [14] TETENS, HOLM. *Kants „Kritik der reinen Vernunft“. Ein systematischer Kommentar*. Philipp Reclam jun., Stuttgart, 2006.

- [15] THIEL, CHRISTIAN. *Philosophie und Mathematik*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1995.
- [16] TUSCHIK, HANS-PETER/WOLTER, HELMUT. *Mathematische Logik - kurz gefaßt*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg/Berlin, 2002. 2. Auflage.
- [17] VON HARTMANN, EDUARD. *Kants Erkenntnistheorie und Metaphysik (in den vier Perioden ihrer Entwicklung)*. Scienta Verlag, Aalen, 1979.